Calcul matriciel

Laydi M.R.

Sommaire

0

Notations principales

0.1 Nombres, ensembles

$\mathbb{N}$ ensemble des entiers naturels et $\mathbb{N}^* = \mathbb{N}\backslash\{0\}$.

$\mathbb{R}$ ensemble des nombres réels.

$\mathbb{C}$ ensemble des nombres complexes.

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ensemble des matrices carrées réelles d'ordre n, n entier ≥ 2.

$\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ensemble des matrices carrées complexes d'ordre n.

$\delta_{i,j}$ *symbole de Kronecker* : $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$.

$\overline{\alpha}$ nombre complexe conjugué de α, i.e. $\overline{\alpha} = \mathrm{Re}(\alpha) - i\,\mathrm{Im}(\alpha)$, où $i^2 = -1$

$|\alpha|$ module d'un nombre complexe α, i.e. $|\alpha| = \sqrt{\alpha\overline{\alpha}} = \sqrt{\mathrm{Re}(\alpha)^2 + \mathrm{Im}(\alpha)^2}$.

0.2 Vecteurs

$\mathbf{e}_i$ $i-$ème vecteur colonne de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, i.e.

$$\mathbf{e}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ . \\ 0 \end{pmatrix}, .., \quad \mathbf{e}_n \begin{pmatrix} 0 \\ . \\ . \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{x} = (x_i) \in \mathbb{C}^n$ vecteur colonne, de $i-$ème composante complexe x_i, i.e.

$$\mathbf{x} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\mathbf{e}_1 + .. + x_n\mathbf{e}_n.$$

$\mathbf{x}^t$ vecteur ligne $(x_1, .., x_n)$.

$\mathbf{0} = (0)$.

$\mathbf{1} = (1)$.

$\mathbf{x} \geq \mathbf{y}$ pour $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ si $x_i \geq y_i$ $\forall i$. On dit que $\mathbf{x}$ est positif si $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.

$\mathbf{x} > \mathbf{y}$ pour $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ si $x_i > y_i$ $\forall i$.

0.2.1 Produit scalaire

$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i$ produit scalaire de vecteurs $\mathbf{x} = (x_i)$, $\mathbf{y} = (y_i) \in \mathbb{C}^n$.

On a

$$\begin{array}{lll}
\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^t.\overline{\mathbf{y}} & = \overline{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle} & \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n \\
\langle \alpha \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle & = \alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle & \alpha \in \mathbb{C},\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n \\
\langle \mathbf{x}, \alpha \mathbf{y} \rangle & = \overline{\alpha} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle & \alpha \in \mathbb{C},\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n \\
\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle & = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle & \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n \\
\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z} \rangle & = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle & \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n
\end{array}$$

0.2.2 Orthogonalité

On dit que $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ sont orthogonaux si $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$.

Un ensemble $\mathbf{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, .., \mathbf{b}_n\}$ est orthogonal si $\langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j \rangle = 0$ $\forall i \neq j$.

Un ensemble orthogonal $\mathbf{B}$ est orthonormal si $\langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_i \rangle = 1$ $\forall i$, i.e. $\mathbf{B}$ est orthonormal si $\langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j \rangle = \delta_{i,j}$.

0.2.3 Normes

$\|\mathbf{x}\|_2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ norme euclidienne sur $\mathbb{C}^n$.

$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ norme du max sur $\mathbb{C}^n$.

0.2.4 Inégalité de Schwarz

Pour $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$, on a :

$$\underbrace{\left| \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i \right|}_{|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|} \leq \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{\|\mathbf{x}\|_2} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{\|\mathbf{y}\|_2}.$$

0.3 Matrices

$A = (a_{i,j})$ matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, d'éléments $a_{i,j} = \langle A\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i\rangle$. On écrit

$$A \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

$O = (0)$ matrice nulle.

$I = (\delta_{i,j})$ matrice identité.

$P_\sigma = (p_{i,j})$ matrice de permutation associée à une application bijective σ de $\{1, 2, ..n\}$ dans $\{1, 2, ..n\}$, définie par

$$P_\sigma \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_{\sigma(i)} \ \forall i.$$

diag$(\mathbf{d})$, où $\mathbf{d} = (d_i) \in \mathbb{C}^n$, matrice diagonale, telle que :

$$(\mathrm{diag}\,(\mathbf{d}))_{i,j} = \begin{cases} d_i & \forall i = j \\ 0 & \forall i \neq j \end{cases}.$$

diag(A), où $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, matrice diagonale, telle que :

$$(\mathrm{diag}\,(A))_{i,j} = \begin{cases} a_{i,i} & \forall i = j \\ 0 & \forall i \neq j \end{cases}.$$

$A \geq B$ pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si $a_{i,j} \geq b_{i,j} \ \forall i, j$.

On dit que A est positive si $A \geq O$. On a

$$A \geq O \Leftrightarrow \{A\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R} : \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}.$$

$\det(A)$ déterminant d'une matrice A.

$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ polynôme caractéristique de A.

$\lambda = \lambda(A)$ valeur propre d'une matrice A, i.e. $p_A(\lambda) = 0$.

$Sp(A)$ spectre d'une matrice A, i.e. $Sp(A) = \bigcup_{i=1}^{n} \{\lambda_i(A)\}$.

$\rho(A) = \max_{\lambda \in Sp(A)} |\lambda|$ rayon spectral d'une matrice A.

$\mathbf{x}_k$ vecteur propre associé à une valeur propre $\lambda_k = \lambda(A)$, i.e.

$$A\mathbf{x}_k = \lambda_k \mathbf{x}_k, \ \mathbf{x}_k \neq \mathbf{0}.$$

A^{-1} matrice inverse d'une matrice inversible A. Rappelons que

$$A \text{ inversible} \Leftrightarrow 0 \notin Sp(A) \Leftrightarrow p_A(0) = \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \{A\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}\}.$$

$A^t = \left(a_{i,j}^t\right)$ matrice transposée de A, définie par $a_{i,j}^t = a_{j,i}$. On a :

$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \left\langle \mathbf{x}, A^t\mathbf{y}\right\rangle, \ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n, \ \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Pour une matrice de permutation $P_\sigma = (p_{i,j})$, on a :

$$P_\sigma^{-1} = P_\sigma^t.$$

Les opérations matricielles courantes :

$$\begin{array}{lll}
\left(A^t\right)^t & = A & A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\
(A+B)^t & = A^t + B^t & A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\
(\alpha A)^t & = \alpha A^t & \alpha \in \mathbb{C},\ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\
(AB)^t & = B^t A^t & A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\
\det\left(A^t\right) & = \det(A) & A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\
\left(A^{-1}\right)^t & = \left(A^t\right)^{-1} & \text{pour les matrices inversibles } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})
\end{array}$$

$A^* = \left(a_{i,j}^*\right)$ matrice adjointe de A, définie par $a_{i,j}^* = \overline{a_{j,i}}$. On a :

$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, A^*\mathbf{y}\rangle, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

Les opérations matricielles courantes :

$$\begin{array}{lll}
\left(A^*\right)^* & = A & A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\
(A+B)^* & = A^* + B^* & A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\
(\alpha A)^* & = \overline{\alpha} A^* & \alpha \in \mathbb{C},\ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\
(AB)^* & = B^* A^* & A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\
\det\left(A^*\right) & = \overline{\det(A)} & A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\
\left(A^{-1}\right)^* & = \left(A^*\right)^{-1} & \text{pour les matrices inversibles } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})
\end{array}$$

0.4 Exercices

Exercice 1 - *Soit* $\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 4, \sigma(3) = 1, \sigma(4) = 3$. *Vérifier que*

$$P_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 - *Soit une matrice de permutation* $P_\sigma = (p_{i,j})$.
Vérifier que $p_{i,k} = \delta_{i,\sigma(k)}$. *En déduire que*

$$P_\sigma P_\sigma^t = I.$$

Exercice 3 - *Calculer l'inverse de* $A\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$ *et de* $B\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}$.

Rép. $A^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$, $B^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$.

Exercice 4 - *Calculer le déterminant de* $A\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&1&1-i\\0&1+i&1\end{pmatrix}$ *et de* $B\begin{pmatrix}2&0&1&0\\1&3&0&1\\0&0&\theta&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$.

Rép. $\det(A)=-1$, $\det(B)=4\theta-4$.

Exercice 5 - *Calculer l'inverse ainsi que le polynôme caractéristique de* $A\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&1\\0&0&-1&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}$.

Rép. $A^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1&-1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\1&0&1&0\end{pmatrix}$, $p_A(\lambda)=\lambda^4+\lambda^3-\lambda-\lambda^2-1$.

Exercice 6 - *soit* $A=\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_1\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_3\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$.

Vérifier que $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1+\theta\mathbf{x}_2$ $\forall\theta\in\mathbb{R}$ *et* $\mathbf{x}_3$ *sont des vecteurs propres de* A.
Vérifier que $\mathbf{B}=\{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3\}$ *est une base orthogonale de* $\mathbb{R}^3$.

Exercice 7 - *Calculer le spectre de* $A\begin{pmatrix}1&-1&2\\-1&2&-1\\-2&-1&3\end{pmatrix}$. *Déduire* $\rho(A)$.

Rép. $\lambda_1=2$, $\lambda_2=2+i$, $\lambda_3=2-i$, *donc* $\rho(A)=\sqrt{5}$.

Exercice 8 - *Soit* $A=\begin{pmatrix}0&i\\-i&0\end{pmatrix}$. *Calculer les valeurs propres* λ_k *et les vecteurs propres associés* $\mathbf{x}_k$*; tels que* $\langle\mathbf{x}_k,\mathbf{e}_k\rangle=1$.

Rép. $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=1$, $\mathbf{x}_1=\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_2=\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}$.

Déduire A^n *et* $\exp(A)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}A^n$.

Rép. $A^n=P^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1^n&0\\0&\lambda_2^n\end{pmatrix}P$ *et* $\exp(A)=P^{-1}\begin{pmatrix}\exp(\lambda_1)&0\\0&\exp(\lambda_2)\end{pmatrix}P$*;*
$P=\begin{pmatrix}1&i\\i&1\end{pmatrix}$.

Donner le cas général.

1

Matrice symétrique ou hermitienne

Définition 1 - *Une matrice A est hermitienne si*

$$A^* = A.$$

Définition 2 - *Une matrice A est symétrique si*

$$A^* = A \text{ et } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Exemple 1 - *Pour* $A = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 1 & 1-i \\ 0 & 1+i & 1 \end{pmatrix}$, *on a*

$$A^t = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 1 & 1+i \\ 0 & 1-i & 1 \end{pmatrix}, \; A^* = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 1 & 1-i \\ 0 & 1+i & 1 \end{pmatrix} = A.$$

Donc A est hermitienne.

Par contre, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ *est une matrice non hermitienne, puisque*

$$B^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \neq B.$$

Rappelons un résultat important concernant les valeurs propres d'une matrice hermitienne.

Théorème 1 - *Les valeurs propres d'une matrice hermitienne $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, sont réelles, i.e. $Sp(A) \subset \mathbb{R}$. De plus, il existe une base orthonormale $\mathbf{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, .., \mathbf{b}_n\}$ de $\mathbb{K}^n$, formée de n vecteurs propres de A.*

- Preuve de $Sp(A) \subset R$. Soit λ une valeur propre de A et $x \neq 0$ un vecteur propre associé, tel que $Ax = \lambda x$. Donc

$$\begin{aligned}
\left\langle \underbrace{A\mathbf{x}}_{\lambda\mathbf{x}}, \mathbf{x} \right\rangle &= \left\langle \mathbf{x}, \underbrace{\underbrace{A^*}_{A}\mathbf{x}}_{\lambda\mathbf{x}} \right\rangle \\
\langle \lambda\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle &= \langle \mathbf{x}, \lambda\mathbf{x} \rangle \\
\sum_{i=1}^{n} \lambda x_i \overline{x}_i &= \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{\lambda x_i} \\
\lambda \|\mathbf{x}\|_2^2 &= \overline{\lambda} \|\mathbf{x}\|_2^2
\end{aligned}$$

D'où $\lambda = \overline{\lambda} \Rightarrow \lambda \in R$.

- Orthogonalité des vecteurs propres. Si x_1 et x_2 sont deux vecteurs propres d'une matrice hermitienne A, associés respectivement à λ_1 et λ_2, avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$, alors x_1 et x_2 sont orthogonaux. En effet, on sait déjà que λ_1 et λ_2 sont réelles. Donc, si

$$A\mathbf{x}_1 = \lambda_1\mathbf{x}_1 \text{ et } A\mathbf{x}_2 = \lambda_2\mathbf{x}_2,$$

alors

$$\begin{aligned}
\left\langle \underbrace{A\mathbf{x}_1}_{\lambda_1\mathbf{x}_1}, \mathbf{x}_2 \right\rangle &= \left\langle \mathbf{x}_1, \underbrace{\underbrace{A^*}_{A}\mathbf{x}_2}_{\lambda_2\mathbf{x}_2} \right\rangle \\
\lambda_1 \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle &= \lambda_2 \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle
\end{aligned}$$

i.e.

$$\underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle = 0 \Rightarrow \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle = 0.$$

1.1 Exemples

Exemple 2 - *Considérons la matrice hermitienne $A \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 1 & 1-i \\ 0 & 1+i & 1 \end{pmatrix}$.*

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & -i & 0 \\ i & 1-\lambda & 1-i \\ 0 & 1+i & 1-\lambda \end{vmatrix} = -1 + 2\lambda + 2\lambda^2 - \lambda^3 = (1+\lambda)\left(-\lambda^2 + 3\lambda - 1\right).$$

Les valeurs propres de A sont bien réelles

$$\lambda_1 = -1, \ \lambda_2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}, \ \lambda_3 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}.$$

Un calcul élémentaire montre que : $A\mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i$ *pour* $\mathbf{x}_1 \begin{pmatrix} 2i \\ 2 \\ -1-i \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ i\lambda_2 \\ (1-i)(1-\lambda_2) \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ i\lambda_3 \\ (1-i)(1-\lambda_3) \end{pmatrix}$. *Comme les valeurs propres sont distinctes, alors* $\mathbf{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$, *où* $\mathbf{b}_i = \frac{\mathbf{x}_i}{\|\mathbf{x}_i\|_2}$, *est une base orthonormale de* $\mathbb{C}^3$.

Exemple 3 - *De même pour la matrice hermitienne* $A \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *On vérifie que* $A\mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i$ *pour*

$$\begin{array}{lll} \lambda_1 = 1 & \lambda_2 = 1+\sqrt{2} & \lambda_3 = 1-\sqrt{2} \\ \mathbf{x}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} & \mathbf{x}_2 \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \mathbf{x}_3 \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

On déduit que $\mathbf{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$, $\mathbf{b}_i = \frac{\mathbf{x}_i}{\|\mathbf{x}_i\|_2}$, *est une base orthonormale de* $\mathbb{R}^3$.

Exemple 4 - *Considérons le cas où une valeur propre est double.*
Par exemple pour $A \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *on a* $A\mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i$ *pour*

$$\begin{array}{lll} \lambda_1 = 1 & \lambda_2 = 1 & \lambda_3 = 3 \\ \mathbf{x}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \mathbf{x}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \mathbf{x}_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Il est clair que

$$\lambda_2 \neq \lambda_3 \Rightarrow \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \rangle = 0.$$
$$\lambda_1 \neq \lambda_3 \Rightarrow \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3 \rangle = 0.$$

Par contre, pour la valeur propre double $\lambda = 1$, *on a :*

$$\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle \neq 0.$$

On peut remplacer $\mathbf{x}_1$ *par* $\widetilde{\mathbf{x}_1}$ *de la forme :*

$$\widetilde{\mathbf{x}_1} = \mathbf{x}_1 + \theta \mathbf{x}_2 \ \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

En effet, $\widetilde{\mathbf{x}_1}$ *est aussi vecteur propre de* A, *associé à la valeur propre* $\lambda_1 = 1$, *puisque*

$$A\widetilde{\mathbf{x}_1} = A\mathbf{x}_1 + \theta A\mathbf{x}_2 = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \theta \underbrace{\lambda_2}_{\lambda_1} \mathbf{x}_2 = \lambda_1 \underbrace{(\mathbf{x}_1 + \theta \mathbf{x}_2)}_{\widetilde{\mathbf{x}_1}}.$$

Il vérifie en plus

$$\langle \widetilde{\mathbf{x}_1}, \mathbf{x}_3 \rangle = \underbrace{\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3 \rangle}_{0} + \theta \underbrace{\langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \rangle}_{0} = 0.$$

Choisissons alors θ, tel que

$$\langle \widetilde{\mathbf{x}_1}, \mathbf{x}_2 \rangle = 0 \Rightarrow (1+\theta, 1+\theta, \theta) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \theta = -\frac{2}{3} \Rightarrow \widetilde{\mathbf{x}_1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$\langle \widetilde{\mathbf{x}_1}, \mathbf{x}_2 \rangle = \langle \widetilde{\mathbf{x}_1}, \mathbf{x}_3 \rangle = \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \rangle = 0.$$

On déduit donc que $\mathbf{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$, où

$$\mathbf{b}_1 = \frac{\widetilde{\mathbf{x}_1}}{\|\widetilde{\mathbf{x}_1}\|_2} = \widetilde{\mathbf{x}_1},\ \mathbf{b}_2 = \frac{\mathbf{x}_2}{\|\mathbf{x}_2\|_2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{x}_2,\ \mathbf{b}_3 = \frac{\mathbf{x}_3}{\|\mathbf{x}_3\|_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{x}_3$$

est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.

1.2 Remarques

Remarque 1 - *Puisque*

$$(AA^*)^* = \underbrace{(A^*)^*}_{A} A^* = AA^*,$$

alors, AA^* est symétrique pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et hermitienne pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Remarque 2 - ***Les vecteurs propres d'une matrice hermitienne ne sont pas orthogonaux, en général.***
Prendre la matrice identité, $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Remarque 3 - *Les valeurs propres de la matrice non symétrique $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ sont complexes. En effet,*

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 2 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ -2 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 10 - 13\lambda + 6\lambda^2 - \lambda^3 = (2-\lambda)\left(\lambda^2 - 4\lambda + 5\right).$$

D'où

$$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 2+i,\ \lambda_3 = 2-i.$$

***Cet exemple montre que le fait que la matrice soit hermitienne est nécessaire** pour établir le théorème.*

Remarque 4 - *Les valeurs propres de la matrice non symétrique* $A\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ *sont réelles.*

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & 0 \\ -1 & -\lambda & -2 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 4\lambda = -\lambda\left(\lambda^2 - 4\right).$$

Donc

$$\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 2.$$

Cet exemple montre que la symétrie d'une matrice n'est pas nécessaire pour que les valeurs propres soient réelles.

De manière générale, on a :

Lemme 1 - *Pour une matrice tridiagonale d'ordre* $n \geq 2$ *de la forme*

$$A = \begin{bmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ c & a & b & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a & b \\ 0 & \cdots & 0 & c & a \end{bmatrix},\ où\ a \in \mathbb{C},\ b, c \in \mathbb{R}\ et\ bc > 0,$$

les valeurs propres $\lambda_k(A)$ *sont données par*

$$\lambda_k = a + 2b\sqrt{\frac{c}{b}}\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right);\ k = 1, 2, .., n. \tag{1.1}$$

- **Preuve.** On écrit A sous la forme

$$A = aI + B$$

et on pose

$$\lambda_k = a + \underbrace{2b\sqrt{\frac{c}{b}}\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)}_{\mu_k},$$

de sorte que

$$A\mathbf{x}_k = \lambda_k\mathbf{x}_k \Leftrightarrow B\mathbf{x}_k = \underbrace{(\lambda_k - a)}_{\mu_k}\mathbf{x}_k.$$

Le problème donc revient à montrer que $\mu = \mu_k$ est une valeur propre de B dans le cas où $b, c > 0$. Utilisons la solution générale de

$$br^2 - \mu r + c = 0.$$

i.e.

$$r_1 = \frac{\mu - \sqrt{\Delta}}{2b} \text{ et } r_2 = \frac{\mu + \sqrt{\Delta}}{2b}$$

où

$$\Delta = \mu^2 - 4bc = -4bc \sin^2\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$$

i.e.

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{\frac{c}{b}}\left(\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) - i\sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\right) = \sqrt{\frac{c}{b}}\exp\left(-i\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\right) \\ r_2 &= \sqrt{\frac{c}{b}}\left(\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) + i\sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\right) = \sqrt{\frac{c}{b}}\exp\left(i\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\right) \end{aligned}$$

Ainsi, pour

$$x_s = r_2^s - r_1^s, \;\; s = 0, 1, .., n, n+1 \Rightarrow x_0 = x_{n+1} = 0,$$

et pour tout $j = 1, .., n$, on a :

$$\begin{aligned} (B\mathbf{x})_j - (\mu\mathbf{x})_j &= cx_{j-1} + bx_{j+1} - \mu x_j \\ &= c\left(r_2^{j-1} - r_1^{j-1}\right) + b\left(r_2^{j+1} - r_1^{j+1}\right) - \mu\left(r_2^j - r_1^j\right) \\ &= r_2^{j-1}\left(\underbrace{br_2^2 - \mu r_2 + c}_{0}\right) + r_1^{j-1}\left(\underbrace{br_1^2 - \mu r_1 + c}_{0}\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Remarque 5 - *La valeurs propre λ_k, $1 \leq k \leq n$, admet pour vecteur propre $\mathbf{x}_k = (x_j)$, où*

$$x_j = \frac{r_2^j - r_1^j}{2i} = \sqrt{\frac{c}{b}}\sin\left(j\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\right).$$

Exercice 9 - *Déduire les valeurs propres des matrices :*

$$A\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \;\; et\; B\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2

Normes sur les matrices

On distingue trois types de normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

1. norme.
2. norme matricielle.
3. norme matricielle subordonnée.

2.1 Norme

Définition 3 - *Une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une application N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{R}$, telle que :*

$$\begin{array}{lll} \textit{N1)} & N(A) = 0 \Rightarrow A = O & \\ \textit{N2)} & N(\alpha A) = |\alpha| \times N(A) & \forall \alpha \in \mathbb{C},\ \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}). \\ \textit{N3)} & N(A+B) \leq N(A) + N(B) & \forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}). \end{array}$$

Exercice 10 - *Il résulte de la définition que :*

$$N(O) = 0 \ \textit{et}\ N(A) \geq 0\ \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}). \tag{2.1}$$

Exercice 11 - *L'application*

$$N_\infty(A) = \max_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}|,$$

est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Par contre, l'application $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \min_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}|$ ne l'est pas.

Exercice 12 - *L'application*

$$N_2(A) = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{i,j}|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. C'est la norme de Schur.

Exercice 13 - *L'application* $N(A) = \rho(A)$ *n'est pas une norme sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. *Prendre* $A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.2 Norme matricielle

Définition 4 - *Une norme matricielle sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *est une* <u>*norme*</u> N *sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, *vérifiant :*

$$N4) \quad N(AB) \le N(A) \times N(B) \ \ \forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}). \tag{2.2}$$

Exercice 14 - *La norme* N_∞ *n'est pas une norme matricielle. Prendre* $A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exemple 5 - *La norme de Schur est une norme matricielle.*
La propriété N4) est une conséquence directe de l'inégalité de Schwarz.

- **Preuve.** En effet, soit $C = AB$, i.e. $C = (c_{i,j})$ où

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} \ \ \forall\ i, j \in \{1, .., n\}.$$

Donc

$$|c_{i,j}| \le \left(\sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_{k,j}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow |c_{i,j}|^2 \le \left(\sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}|^2\right) \left(\sum_{k=1}^{n} |b_{k,j}|^2\right)$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |c_{i,j}|^2}_{\sum\limits_{i,j=1}^{n} |c_{i,j}|^2 = |N_2(C)|^2} \le \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}|^2\right)\right)}_{\sum\limits_{i,k=1}^{n} |a_{i,k}|^2 = |N_2(A)|^2} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_{k,j}|^2\right)\right)}_{\sum\limits_{k,j=1}^{n} |b_{k,j}|^2 = |N_2(B)|^2}$$

i.e.

$$N_2(C) \le N_2(A) \times N_2(B).$$

Exercice 15 - *Si* N *est une norme matricielle sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, *l'application*

$$N_D(A) = N\left(D^{-1} A D\right),$$

où D *est une matrice inversible, l'est aussi.*

2.3 Norme matricielle subordonnée

Les normes vectorielles les plus couramment utilisées sur $\mathbb{C}^n$ sont

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\|_\infty &= \max_{1\le i\le n} |x_i| \\ \|\mathbf{x}\|_2 &= \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

De manière générale

Définition 5 - *Une norme sur $\mathbb{C}^n$ est une application $\|.\|$ de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{R}$, telle que :*

$$\begin{array}{lll} N1) & \|\mathbf{x}\| = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0} & \\ N2) & \|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha| \times \|\mathbf{x}\| & \forall\alpha \in \mathbb{C}, \forall\mathbf{x} \in\mathbb{C}^n. \\ N3) & \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \le \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| & \forall\mathbf{x},\mathbf{y} \in\mathbb{C}^n. \end{array}$$

Exercice 16 - *L'application*

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

est une norme sur $\mathbb{C}^n$.
Par contre, l'application $\mathbf{x} \in\mathbb{C}^n \to \min\limits_{1\le i\le n} |x_i|$ ne l'est pas.

Définition 6 - *Soit $\|.\|$ une certaine norme vectorielle. On définit une norme matricielle, appelée norme matricielle subordonnée à la norme $\|.\|$, par*

$$\|A\| = \max_{\mathbf{x}\in\mathbb{C}^n\setminus\{\mathbf{0}\}} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}.$$

Exercice 17 - *Il résulte de la définition que :*

$$\begin{array}{lll} P1) & \|I\| = 1. & \\ P2) & \|A\mathbf{x}\| \le \|A\| \times \|\mathbf{x}\| & \forall\mathbf{x} \in\mathbb{C}^n, \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}). \\ P3) & \|AB\| \le \|A\| \times \|B\| & \forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}). \end{array}$$

Exercice 18 - *La norme de Schur n'est pas une norme matricielle subordonnée, i.e. elle n'est pas induite par une norme vectorielle. Prendre $N_2(I)$.*

Définition 7 - *A partir de la norme vectorielle $\|.\|_q$, $q = 1, 2$ ou ∞, on note la norme matricielle subordonnée*

$$\|A\|_q = \max_{\mathbf{x}\in\mathbb{C}^n\setminus\{\mathbf{0}\}} \frac{\|A\mathbf{x}\|_q}{\|\mathbf{x}\|_q}.$$

2.4 Caractérisation de la norme $\|A\|_\infty$

Lemme 2 - *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors*

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|. \tag{2.3}$$

- **Preuve.** Montrons d'abord

$$\|A\|_\infty \leq \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|.$$

Par définition

$$\|A\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |(A\mathbf{x})_i| \quad \text{où} \quad (A\mathbf{x})_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j.$$

Or

$$|(A\mathbf{x})_i| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \underbrace{|x_j|}_{\leq\|\mathbf{x}\|_\infty} \leq \|\mathbf{x}\|_\infty \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|.$$

Donc

$$\|A\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_\infty \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \Rightarrow \|A\|_\infty \leq \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|.$$

Il reste à montrer

$$\|A\|_\infty \geq \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|.$$

En effet, soit k un indice, tel que

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{k,j}| = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|,$$

et soit x, tel que

$$x_j = \begin{cases} \frac{\overline{a}_{k,j}}{|a_{k,j}|} & \text{si } a_{k,j} \neq 0 \\ 1 & \text{si } a_{k,j} = 0 \end{cases}.$$

Ainsi

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = 1,$$

et

$$(A\mathbf{x})_k = \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}x_j = \sum_{j=1}^{n} \begin{cases} \frac{a_{k,j}\overline{a}_{k,j}}{|a_{k,j}|} & \text{si } a_{k,j} \neq 0 \\ a_{k,j} & \text{si } a_{k,j} = 0 \end{cases} = \sum_{j=1}^{n} \begin{cases} |a_{k,j}| & \text{si } a_{k,j} \neq 0 \\ a_{k,j} & \text{si } a_{k,j} = 0 \end{cases} = \sum_{j=1}^{n} |a_{k,j}|.$$

Donc

$$\|A\mathbf{x}\|_\infty \geq (A\mathbf{x})_k = \sum_{j=1}^{n} |a_{k,j}| = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| .$$

Alors,

$$\|A\|_\infty \geq \frac{\|A\mathbf{x}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty} = \|A\mathbf{x}\|_\infty \geq \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| .$$

Exemple 6 - *Pour* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, *on a*

$$\|A\|_\infty = \max\{2,5,3\} = 5 \text{ et } \left\|A^t\right\|_\infty = \max\{3,3,4\} = 4.$$

Exemple 7 - *La matrice de Hilbert A* $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}$ *a pour norme* $\|A\|_\infty = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

2.5 Caractérisation de la norme $\|A\|_2$

Lemme 3 - *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. *Alors*

$$\|A\|_2 = \begin{cases} \rho(A) & \text{pour les matrices hermitiennes.} \\ \sqrt{\rho(A^*A)} & \text{cas général.} \end{cases} \tag{2.4}$$

- **Preuve.** On sait, pour une matrice hermitienne A, qu'il existe une base orthonormale de C^n, formée de vecteurs propres $b_1, b_2, .., b_n$. Donc $\forall x \in C^n$

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{x_i}_{=\langle \mathbf{x},\mathbf{b}_i\rangle \in \mathbb{C}} \mathbf{b}_i,\ \|\mathbf{x}\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 ,$$

et l'on a :

$$A\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i A\mathbf{b}_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_i \mathbf{b}_i.$$

Ainsi,

$$\|A\mathbf{x}\|_2^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i x_i \overline{\lambda_i x_j} \underbrace{\langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j\rangle}_{\delta_{i,j}} = \sum_{i=1}^{n} \left(\underbrace{|\lambda_i|}_{\leq \rho(A)} \right)^2 |x_i|^2 \leq \rho(A)^2 \underbrace{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}_{\|\mathbf{x}\|_2^2} = (\rho(A) \|\mathbf{x}\|_2)^2 .$$

Il résulte

$$\frac{\|A\mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} \leq \rho(A) \, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \Rightarrow \|A\|_2 \leq \rho(A).$$

Par ailleurs, pour un certain indice k, tel que : $|\lambda_k| = \rho(A)$, on a aussi

$$\begin{aligned} A\mathbf{b}_k = \lambda_k \mathbf{b}_k \quad & \Rightarrow \|A\mathbf{b}_k\|_2 = \|\lambda_k \mathbf{b}_k\|_2 = \underbrace{|\lambda_k|}_{\rho(A)} \times \|\mathbf{b}_k\|_2 \\ & \Rightarrow \frac{\|A\mathbf{b}_k\|_2}{\|\mathbf{b}_k\|_2} = \rho(A) \Rightarrow \|A\|_2 \geq \rho(A). \end{aligned}$$

D'où le résultat recherché pour les matrices hermitiennes. Le cas général se déduit de manière similaire.

Exemple 8 - *Soit la matrice symétrique* $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. *On vérifie que les valeurs propres de* A *sont*

$$\lambda_1 = -1, \ \lambda_2 = \sqrt{2} + 1, \ \lambda_3 = 1 - \sqrt{2}.$$

Donc

$$\|A\|_2 = \rho(A) = \sqrt{2} + 1.$$

Exemple 9 - *Soit la matrice non symétrique* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *On voit que les valeurs propres sont*

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1 \Rightarrow \rho(A) = 1.$$

Par (2.4), on obtient

$$\begin{aligned} A^*A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \lambda_1(A^*A) &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}, \ \lambda_2(A^*A) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} \\ & \Rightarrow \|A\|_2 = \sqrt{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

On constate que $\rho(A) \neq \|A\|_2$, *mais*

$$\rho(A) < \|A\|_2.$$

La symétrie de la matrice est donc nécessaire *pour établir (2.4).*

3

Lien de la norme avec le rayon spectral

3.1 Majoration du rayon spectral par la norme matricielle : Théorème de Browne

Théorème 2 (Browne 1928) - *Soit N une norme matricielle, subordonnée ou non. Alors,*

$$\rho(A) \leq N(A) \;\; \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}). \tag{3.1}$$

- **Preuve.** Soit λ une valeur propre, tel que : $|\lambda| = \rho(A)$. Donc,

  $$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \text{ pour } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}.$$

  On lui associe la matrice $M \in M_n(\mathbb{C})$ définie par :

  $$M = \mathbf{x}\mathbf{x}^t = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & . & x_1x_n \\ x_2x_1 & x_2^2 & . & x_2x_n \\ . & . & . & . \\ x_nx_1 & x_nx_2 & . & x_n^2 \end{pmatrix} \neq O.$$

  Alors,

  $$N\left(\lambda \underbrace{\mathbf{x}\mathbf{x}^t}_{M}\right) = N\left(A\underbrace{\mathbf{x}\mathbf{x}^t}_{M}\right)$$
  $$\underbrace{|\lambda|}_{\rho(A)}\underbrace{N(M)}_{\neq 0} = N(AM) \leq N(A) \times \underbrace{N(M)}_{\neq 0}.$$

  D'où le résultat.

Exemple 10 - *Pour* $A\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, *on a :* $N_2(A) = \sqrt{6}$, $\|A\|_\infty = 2$, $\|A^t\|_\infty = 3$. *Par le théorème de Browne on obtient*

$$\rho(A) \leq 2.$$

Cependant, la valeur exacte est $\rho(A) = \sqrt{2}$, *puisque* $S_p(A) = \left\{1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\right\}$.

Remarque 6 - *Remarquons que*

$$\underbrace{\rho(A)}_{\sqrt{2}} \nleq \underbrace{N_\infty(A)}_{1}.$$

La propriété N4) est donc nécessaire pour établir (3.1).

Exemple 11 - *Pour* $A\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, *on a :* $N_2(A) = 3$, $\|A\|_\infty = 4$ *et* $\|A^t\|_\infty = 3$. *On conclut que*

$$\rho(A) \leq 3.$$

En effet, $\rho(A) = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$, *puisque* $S_p(A) = \left\{0, \frac{1+\sqrt{13}}{2}, \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right\}$.

Exemple 12 - *En choisissant pour norme matricielle* $N_D(A) = \left\|D^{-1}AD\right\|_\infty$ *où* $D = diag(\mathbf{d})$, $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{d} > \mathbf{0}$*; le théorème de Browne nous donne :*

$$\underbrace{\rho(A)}_{\rho(D^{-1}AD)} \leq \underbrace{\max_{1\leq i\leq n} \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\, d_j}{d_i}}_{\|D^{-1}AD\|_\infty} \quad \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

Cette estimation est optimale.
Par exemple, pour $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, *on a :*

$$\rho(A) = \left\|D^{-1}AD\right\|_\infty \text{ pour } d_1 = d_3 = \frac{1}{2}\sqrt{2} \text{ et } d_2 = 1.$$

Vérification :

$$D^{-1}AD = \begin{pmatrix} \frac{1}{d_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{d_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{d_1}d_2 & \frac{1}{d_1}d_3 \\ \frac{1}{d_2}d_1 & 2 & \frac{1}{d_2}d_3 \\ \frac{1}{d_3}d_1 & \frac{1}{d_3}d_2 & 1 \end{pmatrix};$$

donc

$$\left\|D^{-1}AD\right\|_\infty = \max\left\{1 + \frac{d_2+d_3}{d_1}, 2 + \frac{d_1+d_3}{d_2}, 1 + \frac{d_1+d_2}{d_3}\right\} \ \forall \mathbf{d} > \mathbf{0}.$$

Pour $d_1 = d_3 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ *et* $d_2 = 1$, *on a :*

$$1 + \frac{d_2 + d_3}{d_1} = 2 + \frac{d_1 + d_3}{d_2} = 1 + \frac{d_1 + d_2}{d_3} = 2 + \sqrt{2}.$$

D'où

$$\left\| D^{-1} A D \right\|_\infty = 2 + \sqrt{2}.$$

3.2 Majoration d'une norme par le rayon spectral

On a vu dans le cas où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une matrice hermitienne que

$$N(A) = \rho(A) \text{ pour la norme } N(B) = \|B\|_2 \ \ \forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

Dans le cas où la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable, i.e. il existe une matrice de changement de base U, telle que :

$$U^{-1} A U = \operatorname{diag}(\boldsymbol{\lambda}),$$

on a aussi

$$N(A) = \rho(A) \text{ pour la norme } N(B) = \left\| U^{-1} B U \right\|_\infty \ \ \forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

Dans le cas général, on remarque que l'inégalité suivante

$$N(A) \leq \rho(A),$$

est toujours fausse pour des matrices telles que : $\rho(A) = 0$ et $A \neq O$. C'est le cas par exemple de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Cependant, on montre

Théorème 3 - *Pour* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *et* $\epsilon > 0$, *il existe au moins une norme matricielle subordonnée* $\|.\|_{A,\epsilon}$, *telle que :*

$$\|A\|_{A,\epsilon} \leq \rho(A) + \epsilon.$$

- **Preuve.** La démonstration se base sur l'existence d'une matrice de changement de base U, telle que :

$$U^{-1} A U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & c_{1,2} & \cdots & c_{1,n} \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix},$$

les λ_k étant les valeurs propres de A. Sous forme matricielle, on écrit

$$U^{-1}AU = \mathrm{diag}\,(\boldsymbol{\lambda}) + C.$$

Introduisons la matrice diagonale D_δ =diag($\mathbf{d}$), où $d = \left(1, \delta, \delta^2, .., \delta^{n-1}\right)$, $\delta > 0$, de sorte que :

$$\begin{aligned}(UD_\delta)^{-1} A\,(UD_\delta) &= D_\delta^{-1}U^{-1}AUD_\delta = \mathrm{diag}\,(\boldsymbol{\lambda}) + D_\delta^{-1}CD_\delta \\ &= \mathrm{diag}\,(\boldsymbol{\lambda}) + \begin{pmatrix} 0 & \delta c_{1,2} & \cdots & \delta^{n-1}c_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \delta c_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Ainsi, pour δ, telle que :

$$\left\|D_\delta^{-1}CD_\delta\right\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=i+1}^{n} \delta^{j-i}\,|c_{i,j}| \le \epsilon,$$

on obtient

$$\left\|(UD_\delta)^{-1} A\,(UD_\delta)\right\|_\infty \le \underbrace{\|\mathrm{diag}\,(\boldsymbol{\lambda})\|_\infty}_{\rho(A)} + \underbrace{\left\|D_\delta^{-1}CD_\delta\right\|_\infty}_{\epsilon} = \rho\,(A) + \epsilon.$$

La norme recherchée est

$$\|B\|_{A,\epsilon} = \left\|(UD_\delta)^{-1} B\,(UD_\delta)\right\|_\infty,$$

qui s'écrit aussi sous la forme :

$$\|B\|_{A,\epsilon} = \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\left\|(UD_\delta)^{-1} B\,\underbrace{(UD_\delta)\,\mathbf{x}}_{\mathbf{y}}\right\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty} = \max_{\mathbf{y}\neq\mathbf{0}} \frac{\left\|(UD_\delta)^{-1} B\mathbf{y}\right\|_\infty}{\left\|(UD_\delta)^{-1}\,\mathbf{y}\right\|_\infty} = \max_{\mathbf{y}\neq\mathbf{0}} \frac{\|B\mathbf{y}\|_{A,\epsilon}}{\|\mathbf{y}\|_{A,\epsilon}}$$

où

$$\|\mathbf{y}\|_{A,\epsilon} = \left\|(UD_\delta)^{-1}\,\mathbf{y}\right\|_\infty.$$

Exemple 13 - *Pour la matrice* $A\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ *on peut prendre la norme*

$$\|B\|_{A,\epsilon} = \left\|(UD_\delta)^{-1} B\,(UD_\delta)\right\|_\infty,\ 0 < \delta \le \epsilon,$$

où

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \textit{ et } D_\delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & \delta^2 \end{pmatrix},$$

car

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{U^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{U} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}_{diag(\boldsymbol{\lambda})} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{C}$$

et

$$\left\| D_\delta^{-1} C D_\delta \right\|_\infty = \delta \leq \epsilon \text{ où } D_\delta^{-1} C D_\delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\delta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\delta^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & \delta^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En effet, on a :

$$UD_\delta = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & \delta^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\delta^2 \\ 0 & \delta & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\delta^2 \end{pmatrix} \Rightarrow (UD_\epsilon)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{\delta} & 0 \\ \frac{1}{\delta^2} & 0 & -\frac{1}{\delta^2} \end{pmatrix}.$$

Donc

$$(UD_\delta)^{-1} A (UD_\delta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{\delta} & 0 \\ \frac{1}{\delta^2} & 0 & -\frac{1}{\delta^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\delta^2 \\ 0 & \delta & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\delta^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & \delta \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, comme $S_p = \{0, -2, -2\} = \{0, -2\}$, *on retrouve*

$$\|A\|_{A,\epsilon} = \left\| (UD_\delta)^{-1} A (UD_\delta) \right\|_\infty = \underbrace{2}_{\rho(A)} + \underbrace{\delta}_{\leq \epsilon} \leq \rho(A) + \epsilon.$$

3.3 Convergence d'une suite de matrices

Définition 8 - *On note* $A^k = \underbrace{AA...A}_{k\ fois} = \left(a_{i,j}^{(k)}\right)$ *pour* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *et* $k \in \mathbb{N}^*$.

On écrit

$$\lim_{k\to\infty} A^k = 0 \text{ si } \lim_{k\to\infty} a_{i,j}^{(k)} = 0 \ \forall i, j.$$

Remarque 7 - *Ce qui est équivalent à* $\lim_{k\to\infty} \left\|A^k\right\| = 0$ *pour toute norme matricielle, puisque toutes les normes matricielles sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *sont équivalentes, i.e. il existe deux nombres* β_1 *et* β_2 *strictement positifs, qui peuvent dépendre de* n*, tels que :*

$$\beta_1 \|A\|_\infty \leq \|A\| \leq \beta_2 \|A\|_\infty \ \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

Théorème 4 - *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*
P1) $\lim_{k\to\infty} A^k = 0$,
P2) $\lim_{k\to\infty} A^k \mathbf{x} = 0 \ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$,
P3) $\rho(A) < 1$,
P4) $\|A\| < 1$ *pour au moins une norme matricielle subordonnée* $\|.\|$.

- **Preuve.**

P1)⇒P2) : Résulte de l'inégalité $\left\|A^k\mathbf{x}\right\| \leq \left\|A^k\right\| \times \|\mathbf{x}\|$.

P2)⇒P3) : Si $\rho(A) \geq 1$, on peut trouver un vecteur propre x, tel que :$Ax = \lambda x$, $|\lambda| = \rho(A) \geq 1$. Alors la suite de vecteurs $A^k x = \lambda^k x$ ne converge pas vers 0.

P3)⇒P4) : Choisissons pour norme $\|.\|_{A,\epsilon}$. Alors $\left\|A^k\right\|_{A,\epsilon} \leq \left(\|A\|_{A,\epsilon}\right)^k \leq (\rho(A)+\epsilon)^k$. Dans le cas où $\rho(A) < 1$, on peut trouver $0 < \epsilon < 1-\rho(A)$, telle que $\left\|A^k\right\|_{A,\epsilon} \leq r^k$ pour $r = \rho(A)+\epsilon < 1$. On conclut que $\lim\limits_{k\to\infty} \left\|A^k\right\|_{A,\epsilon} = 0$.

P4)⇒P1) : Conséquence de l'inégalité $\left\|A^k\right\| \leq \|A\|^k$.

Exemple 14 - *Soit* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}^*$. *On a :* $S_p(A) = \{0,\ a\}$. *On vérifie que :*

$$U\,diag(\boldsymbol{\lambda})\,U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underbrace{\lambda_1}_{0} & 0 \\ 0 & \underbrace{\lambda_2}_{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{a} \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} = A.$$

Ainsi,

$$A^k = U \begin{pmatrix} \underbrace{\lambda_1^k}_{0} & 0 \\ 0 & \underbrace{\lambda_2^k}_{a^k} \end{pmatrix} U^{-1}.$$

On voit que P1)⇔P3), i.e.

$$\lim_{k\to\infty} A^k = 0 \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} \left|a^k\right| = \lim_{k\to\infty} \rho(A)^k = 0.$$

Exemple 15 - *Pour* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $\mathbf{x} = \mathbf{1}$, *on a :*

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \geq 2\mathbf{x} \Rightarrow A^k\mathbf{x} \geq 2^k\mathbf{x}.$$

Donc $\lim\limits_{k\to\infty} A^k\mathbf{1} \neq 0$. *On conclut que* $\rho(A) \geq 1$.

Lemme 4 - *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. *La série* $I + A + A^2 + ..$ *converge vers* $(I-A)^{-1}$ *si et seulement si* $\rho(A) < 1$.

- **Preuve.** Supposons que $\rho(A) < 1$. La matrice $(I - A)$ est donc inversible, puisque d'après P4), on a :

$$(I-A)\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \|\mathbf{x}\| = \|A\mathbf{x}\| \leq \|A\| \times \|\mathbf{x}\| \Rightarrow \left(1 - \underbrace{\|A\|}_{<1}\right) \|\mathbf{x}\| \leq 0 \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Posons $S_k = I + A + A^2 + .. + A^k$. Donc

$$\begin{aligned} S_k\,(I-A) = I - A^{k+1} &\Leftrightarrow S_k = (I-A)^{-1}\left(I - A^{k+1}\right) \\ &\Leftrightarrow S_k - (I-A)^{-1} = -\,(I-A)^{-1} A^{k+1} \end{aligned}$$

Par conséquent, en utilisant la norme de P4)

$$\left\|S_k - (I-A)^{-1}\right\| = \left\|(I-A)^{-1} A^{k+1}\right\| \leq \left\|(I-A)^{-1}\right\| \times \left\|A^{k+1}\right\|.$$

Ainsi,

$$\lim_{k\to\infty} \left\|S_k - (I-A)^{-1}\right\| \leq \left\|(I-A)^{-1}\right\| \times \underbrace{\lim_{k\to\infty} \left\|A^{k+1}\right\|}_{0}.$$

Réciproquement, si la série $I + A + A^2 + ..$ existe, on a $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0$, donc $\rho(A) < 1$.

3.4 Stabilité d'un système itératif

On en déduit le résultat très utile suivant :

Lemme 5 - *Soit $B \in M_n(\mathbb{C})$ et $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$. La stabilité d'un système itératif* [1]

$$\mathbf{x}^{k+1} = B\mathbf{x}^k + \mathbf{b}$$

est liée à la condition (nécessaire et suffusante)

$$\rho(B) < 1.$$

[1] i.e. pour une norme $\|.\|$ sur $\mathbb{C}^n$, il existe une constante positive indépendante de m, telle que :

$$\|\mathbf{x}^m\| \leq \underbrace{C}_{\text{constante positive indépendante de } m} \quad \forall m\,.$$

3.5 Application à la méthode de Jacobi

Soit à résoudre le système :

$$\left\{\begin{array}{ll}\theta x_1 - x_2 & = 1\\ -x_1 + \theta x_2 - x_3 & = 0\\ -x_2 + \theta x_3 & = 1\end{array}\right. , \ \theta \notin \left\{-\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}\right\},$$

$$\text{i.e. } \underbrace{\begin{pmatrix}\theta & -1 & 0\\ -1 & \theta & -1\\ 0 & -1 & \theta\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}}_{\mathbf{y}} \Rightarrow \mathbf{x} = \frac{1}{\theta^2 - 2}\begin{pmatrix}\theta\\ 2\\ \theta\end{pmatrix}$$

La méthode standard de Jacobi consite, en partant de $\mathbf{x}^0$ donné, à calculer de proche en proche $\mathbf{x}^{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$, par :

$$\left\{\begin{array}{ll}\theta x_1^{k+1} - x_2^k & = 1\\ -x_1^k + \theta x_2^{k+1} - x_3^k & = 0\\ -x_2^k + \theta x_3^{k+1} & = 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll}x_1^{k+1} & = \frac{1}{\theta}\left(1 + x_2^k\right)\\ x_2^{k+1} & = \frac{1}{\theta}\left(x_1^k + x_3^k\right)\\ x_3^{k+1} & = \frac{1}{\theta}\left(1 + x_2^k\right)\end{array}\right.$$

où

$$\mathbf{x}^{k+1} = J\mathbf{x}^k + \mathbf{b} \text{ avec } J = \frac{1}{\theta}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\theta}\\ 0\\ \frac{1}{\theta}\end{pmatrix}.$$

De manière générale, la méthode de Jacobi pour la résolution d'un système linéaire, de la forme $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$, consiste à résoudre

$$D\mathbf{x}^{k+1} + (A - D)\,\mathbf{x}^k = \mathbf{y}, \text{ i.e. } D\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{y} + (D - A)\,\mathbf{x}^k,$$

ou encore

$$\mathbf{x}^{k+1} = \underbrace{D^{-1}(D - A)}_{J}\mathbf{x}^k + \underbrace{D^{-1}\mathbf{y}}_{\mathbf{b}}.$$

Vérification pour l'exemple :

$$J = D^{-1}(D - A) = \begin{pmatrix}\frac{1}{\theta} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\theta} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{\theta}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} = \frac{1}{\theta}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

On remarque que

$$S_p(J) = \left\{0, \frac{\sqrt{2}}{\theta}, -\frac{\sqrt{2}}{\theta}\right\} \Rightarrow \rho(J) = \left|\frac{\sqrt{2}}{\theta}\right| < 1 \Leftrightarrow |\theta| > \sqrt{2}.$$

Ainsi, le système n'est stable que si

$$|\theta| > \sqrt{2}.$$

Par exemple, pour $\theta = 1$, i.e. pour $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on a :

$$\rho(J) = \sqrt{2} > 1$$

Donc

$$\lim_{k\to\infty} \left|\mathbf{x}^k\right| = \infty.$$

On trouve en partant de $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^1 &= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{J} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}^0} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};\ \Rightarrow \left\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^1\right\|_2 = \left\|\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}\right\|_2 = 2\sqrt{3} \\
\mathbf{x}^2 &= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{J} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}^1} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^2\right\|_2 = \left\|\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}\right\|_2 = 2\sqrt{6} \\
&\dots \\
\mathbf{x}^6 &= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{J} \underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}^5} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^6\right\|_2 = \left\|\begin{pmatrix} -8 \\ -16 \\ -8 \end{pmatrix}\right\|_2 = 8\sqrt{3} \\
&\dots
\end{aligned}$$

On constate qu'on s'éloigne de la solution du système : $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Par contre, pour $\theta = 2$, i.e. pour

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix},\ J = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow\ \rho(J) = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$$

on constate la converge vers la solution :

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^1 &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \left\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^1\right\|_2 = \frac{1}{2}\sqrt{6} \\
\mathbf{x}^2 &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \left\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^2\right\|_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2} \\
&\dots \\
\mathbf{x}^4 &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 1 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow \left\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^4\right\|_2 = \frac{1}{4}\sqrt{2} \\
&\dots
\end{aligned}$$

A la limite on trouve :

$$\lim_{k\to\infty} \left\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^k\right\|_2 = 0.$$

4

Localisation des valeurs propres: Th. de Gershgorin

Dans la suite, on associe à une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ le nombre positif

$$\Lambda_k(A) = \left(\sum_{\substack{j \neq k \\ j=1}}^{n} |a_{k,j}| \right) \text{ où } 1 \leq k \leq n.$$

On dit que $\Lambda_k(A)$ est le $k-$ième rayon de Gershgorin et on note $D_k(A)$ le disque défini par

$$D_k(A) = \{ z \in \mathbb{C},\ |z - a_{k,k}| \leq \Lambda_k(A) \}.$$

Théorème 5 (Gershgorin 1931) - *Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe un indice k, $1 \leq k \leq n$, pour lequel*

$$|\lambda(A) - a_{k,k}| \leq \Lambda_k(A).$$

i.e.

$$\lambda \in \bigcup_{i=1}^{n} D_i(A) \quad \forall \lambda \in Sp(A).$$

- **Preuve.** Soit λ une valeur propre de A et $x \neq 0$ un vecteur propre associé, i.e. $Ax = \lambda x$.
  Soit k un indice, tel que $|x_k| = \|\mathbf{x}\|_\infty$.
  Le $k-$ième ligne du système algébrique s'écrit :

  $$(A\mathbf{x})_k = (\lambda \mathbf{x})_k \Rightarrow a_{k,k}x_k + \sum_{i \neq k} a_{k,i}x_i = \lambda x_k \Rightarrow (\lambda - a_{k,k})\, x_k = \sum_{i \neq k} a_{k,i}x_i.$$

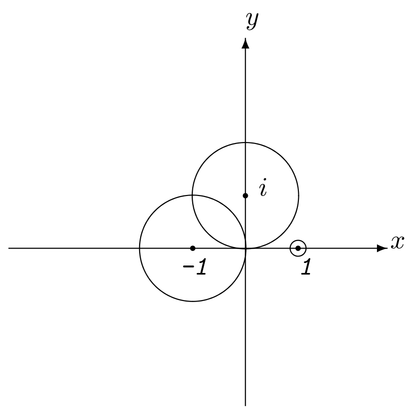
  Alors

  $$|\lambda - a_{k,k}| \times \underbrace{|x_k|}_{\|\mathbf{x}\|_\infty} \leq \sum_{i \neq k} |a_{k,i}| \times \underbrace{|x_i|}_{\leq \|\mathbf{x}\|_\infty} \leq \underbrace{\sum_{i \neq k} |a_{k,i}|}_{\Lambda_k(A)} \|\mathbf{x}\|_\infty.$$

D'où $|\lambda - a_{k,k}| \leq \Lambda_k(A)$.

Exemple 16 - *Les valeurs propres de la matrice* $A \begin{pmatrix} i & -i & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *sont contenues*[1] *dans la région* $\bigcup_{i=1}^{3} D_i(A)$ *formée de la réunion des trois disques :*

$$\begin{array}{ll} D_1(A): & |\lambda - i| \leq 1 \\ D_2(A): & |\lambda + 1| \leq 1 \\ D_3(A): & |\lambda - 1| \leq 0 \quad \Longrightarrow \lambda = 1. \end{array}$$



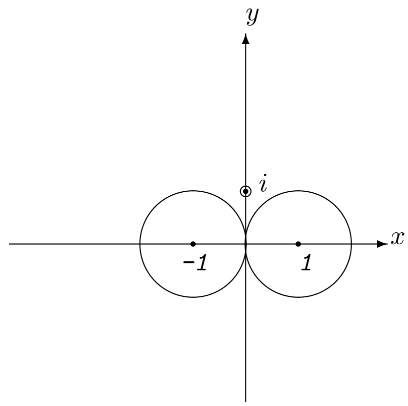
Exemple 17 - *On peut déduire également une nouvelle région où sont localisées les valeurs propres, puisque les valeurs propres d'une matrice sont les mêmes que celles de la matrice transposée associée. En appliquant le théorème de Gershgorin à* $A^t = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ -i & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, *on obtient la région* $\bigcup_{i=1}^{3} D_i(A^t)$ *constituée des disques :*

$$\begin{array}{ll} D_1(A^t): & |\lambda - i| \leq 0 \quad \Longrightarrow \lambda = i. \\ D_2(A^t): & |\lambda + 1| \leq 1 \\ D_3(A^t): & |\lambda - 1| \leq 1 \end{array}$$

---

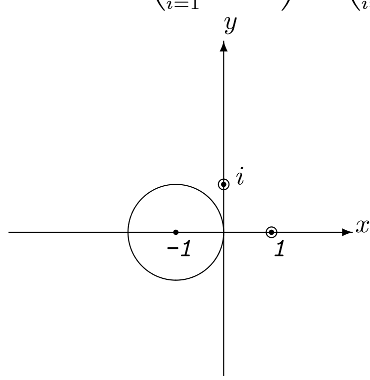
[1] à comparer avec les valeurs propres de A

$$\lambda_1 = i,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = 1.$$



On conclut finalement que les valeurs propres sont contenues dans la région

$$\left(\bigcup_{i=1}^{3} D_i\left(A\right)\right) \bigcap \left(\bigcup_{i=1}^{3} D_i\left(A^t\right)\right).$$



Exemple 18 - *Les valeurs propres de la matrice* $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & n-1 & 2 \end{pmatrix}$

sont contenues dans

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} D_i\left(A\right)\right) = \left\{z \in \mathbb{C},\ \ |z-2| \leq n-1\right\}.$$

5

Matrice définie positive

Définition 9 - *On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est définie positive si*

$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ \mathbf{x} \neq \mathbf{0}.$$

Exemple 19 - *La matrice $A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ est telle que*

$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = |x_1|^2 + |x_2|^2 + x_1 x_2 = \frac{1}{2}\left(|x_1|^2 + |x_2|^2\right) + \frac{1}{2}(x_1 + x_2)^2 > 0 \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}.$$

Donc A est définie positive. Par contre la matrice $B \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas définie positive, puisque $\langle B\mathbf{1}, \mathbf{1} \rangle = 0 \not> 0$.

Remarque 8 - *En fait, la condition: $b_{i,i} = \langle B\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i \rangle > 0 \quad \forall i$, est nécessaire pour qu'une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ soit définie positive.*

5.1 Inversibilité d'une matrice définie positive

Lemme 6 - *Si A est une matrice définie positive alors A est inversible, i.e. $0 \notin Sp(A)$.*

- **Preuve.** On doit montrer que $A\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$. En effet, $A\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$. Mais, cela n'est possible, lorsque A est définie positive, que si $x = 0$.

Remarque 9 - *La réciproque est fausse comme le montre la matrice $A \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui est inversible, mais non définie positive puisque $a_{1,1} \not> 0$.*

5.2 Cas d'une matrice symétrique

Théorème 6 - *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Alors*

$$A \text{ est définie positive} \Leftrightarrow \text{ les valeurs propres de } A \text{ sont réelles } > 0. \qquad (5.1)$$

- **Preuve.** Il existe, dans le cas symétrique, une base orthonormale $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, .., \mathbf{b}_n\}$ de $\mathbb{R}^n$, formée de n vecteurs propres de A. En particulier, tout $x \in \mathbb{R}^n$ est de la forme : $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{b}_i$ avec $\|\mathbf{x}\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2$. Donc

$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j \left\langle \underbrace{A\mathbf{b}_i}_{\lambda_i \mathbf{b}_i}, \mathbf{b}_j \right\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i x_i x_j \underbrace{\langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j\rangle}_{\delta_{i,j}}. \text{ i.e. } \langle A\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |x_i|^2.$$

Ainsi

$$A \text{ est définie positive} \Leftrightarrow \langle A\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle > 0 \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |x_i|^2 > 0 \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \Leftrightarrow \lambda_i > 0 \quad \forall i.$$

Exemple 20 - *Pour $A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a $\lambda_1 = \lambda_2 = 1 > 0$, mais elle n'est pas définie positive, puisque*

$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0.$$

***Cet exemple montre que la symétrie de la matrice est nécessaire pour établir** (5.1).*

Remarque 10 - *Pour toute matrice symétrique $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :*

$$\min_{1 \le i \le n} \{\lambda_i(A)\} \|\mathbf{x}\|_2^2 \le \langle A\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle \le \max_{1 \le i \le n} \{\lambda_i(A)\} \|\mathbf{x}\|_2^2 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Exemple 21 - *La matrice symétrique $A \begin{bmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ b & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \cdots & 0 & b & a \end{bmatrix}$ est définie positive, si et seulement si,*

$$\lambda_k = a + 2b \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) > 0 \ \forall k = 1, .., n.$$

Ce résultat est obtenu en utilisant (1.1).

6

Matrice à diagonale fortement dominante

Définition 10 - *On dit que* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *est une matrice à*

$$\begin{array}{lll} \textit{diagonale dominante} & \textit{si} & |a_{i,i}| \geq \Lambda_i(A) \ \ \forall\ i = 1, .., n. \\ \textit{diagonale } \underline{\textit{strictement}} \textit{ dominante} & \textit{si} & |a_{i,i}| > \Lambda_i(A) \ \ \forall\ i = 1, .., n. \\ \textit{diagonale } \underline{\textit{fortement}} \textit{ dominante} & \textit{si} & \left\{ \begin{array}{ll} |a_{i,i}| \geq \Lambda_i(A) & \forall\ i \in \{1, .., n\}. \\ |a_{k,k}| > \Lambda_k(A) & \textit{pour un certain } k \in \{1, .., n\}. \end{array} \right. \end{array}$$

Exemple 22 - *Les rayons de Gershgorin associés à* $A = \begin{pmatrix} a & -2 & -1 \\ 0 & b & 1 \\ 2 & 3 & c \end{pmatrix}$ *sont* $\Lambda_1 = 3$, $\Lambda_2 = 1$ *et* $\Lambda_3 = 5$. *La matrice* A *est à*

$$\begin{array}{lll} \textit{diagonale dominante} & \textit{si} & |a| \geq 3, \ \ |b| \geq 1 \ \textit{et} \ |c| \geq 5. \\ \textit{diagonale strictement dominante} & \textit{si} & |a| > 3, \ \ |b| > 1 \ \textit{et} \ |c| > 5. \\ \textit{diagonale fortement dominante} & \textit{si} & \left\{ \begin{array}{c} |a| \geq 3, \ \ |b| \geq 1, \ |c| \geq 5, \\ \textit{et} \\ |a| + |b| + |c| > 9. \end{array} \right. \end{array}$$

Exemple 23 - *La matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & . & . & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & . & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 0 & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & n-2 & n-1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n-1 & n \end{pmatrix}, \ n \geq 2,$$

n'est pas à diagonale strictement dominante, mais à diagonale fortement dominante.

Théorème 7 - *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une matrice à diagonale strictement dominante alors A est inversible, i.e. $0 \notin Sp(A)$.*

- **Preuve.** On doit montrer que

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Soit k un indice tel que $|x_k| = \|\mathbf{x}\|_\infty$. Alors

$$\begin{aligned}
A\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad &\Rightarrow \quad a_{k,k}x_k = -\sum_{j\neq k} a_{k,j}x_j \\
&\Rightarrow \quad |a_{k,k}| \times \underbrace{|x_k|}_{\|\mathbf{x}\|_\infty} \leq \sum_{j\neq k} |a_{k,j}| \times \underbrace{|x_j|}_{\leq\|\mathbf{x}\|_\infty} = \|\mathbf{x}\|_\infty \Lambda_k(A) \\
&\Rightarrow \quad \left(\underbrace{|a_{k,k}| - \Lambda_k(A)}_{>0}\right) \|\mathbf{x}\|_\infty \leq 0 \\
&\Rightarrow \quad \|\mathbf{x}\|_\infty \leq 0 \\
&\Rightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

Exemple 24 - *La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ est à digonale strictement dominante, donc inversible.*

Exemple 25 - *De même, la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & . & . & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & . & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -1 & 0 & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & n-2 & n & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n-1 & n+1 \end{pmatrix}$, $n \geq 3$, est à digonale strictement dominante, donc inversible.*

Remarque 11 - *La réciproque est évidement fausse. La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible mais à diagonale non dominante.*

Remarque 12 - *Une matrice à diagonale fortement dominante n'est pas nécessairement inversible. C'est le cas de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.*

7

Matrice réductible ou irréductible

7.1 Matrice réductible

Définition 11 - *Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est réductible s'il existe une matrice de permutation P_σ, telle que :*

$$P_\sigma^t A P_\sigma = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ 0 & A_{2,2} \end{pmatrix},$$

où $A_{1,1}$ et $A_{2,2}$ sont deux matrices carrées.

Exemple 26 - *Remarquons d'abord qu'on a :*

$$\begin{aligned}\left(P_\sigma^t A P_\sigma\right)_{i,j} = \left\langle P_\sigma^t A P_\sigma \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i \right\rangle &= \left\langle A \underbrace{P_\sigma \mathbf{e}_j}_{\mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}(j)}}, \underbrace{P_\sigma \mathbf{e}_i}_{\mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}(i)}} \right\rangle \\ &= \left\langle A \mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}(j)}, \mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}(i)} \right\rangle = a_{\boldsymbol{\sigma}(i),\boldsymbol{\sigma}(j)}.\end{aligned}$$

Considérons maintenant la matrice $A = \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 0 & 22 & 0 \\ 31 & 32 & 33 \end{pmatrix}$.

Comme $a_{2,1} = a_{2,3} = 0$, on obtient une partition de l'ensemble des indices $\{1,2,3\}$ en $K = \{2\}$ et $K^c = \{1,3\}$, de sorte que :

$$a_{i,j} = 0 \ \forall i \in K, \ \ j \in K^c.$$

Donc

$$\begin{aligned}\left(P_\sigma^t A P_\sigma\right)_{3,1} &= a_{\boldsymbol{\sigma}(3),\boldsymbol{\sigma}(1)} = 0, \\ \left(P_\sigma^t A P_\sigma\right)_{3,2} &= a_{\boldsymbol{\sigma}(3),\boldsymbol{\sigma}(2)} = 0,\end{aligned}$$

pour

$$\sigma(3) \in K = \{2\}, \ \sigma(1), \ \sigma(2) \in K^c = \{1,3\}.$$

Ainsi, pour le cas $\sigma(1) = 3$, $\sigma(2) = 1$, *on constate que*

$$\begin{aligned}
P_\sigma^t A P_\sigma &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 0 & 22 & 0 \\ 31 & 32 & 33 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 & 31 & 32 \\ 13 & 11 & 12 \\ 0 & 0 & 22 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 33 & 31 \\ 13 & 11 \end{pmatrix}}_{A_{1,1}} & \underbrace{\begin{pmatrix} 32 \\ 12 \end{pmatrix}}_{A_{1,2}} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A_{2,1}} & \underbrace{(22)}_{A_{2,2}} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

La matrice $P_\sigma^t A P_\sigma$ *s'écrit donc sous la forme*

$$P_\sigma^t A P_\sigma = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ 0 & A_{2,2} \end{pmatrix},$$

où $A_{1,1}$ *et* $A_{2,2}$ *sont deux matrices carrées, donc* A *est réductible.*

De même, pour le cas $\sigma(1) = 1$, $\sigma(2) = 3$, *on a*

$$\begin{aligned}
P_\sigma^t A P_\sigma &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 0 & 22 & 0 \\ 31 & 32 & 33 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 13 & 12 \\ 31 & 33 & 32 \\ 0 & 0 & 22 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 11 & 13 \\ 31 & 33 \end{pmatrix}}_{A_{1,1}} & \underbrace{\begin{pmatrix} 12 \\ 32 \end{pmatrix}}_{A_{1,2}} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A_{2,1}} & \underbrace{(22)}_{A_{2,2}} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Exemple 27 - *Considérons la matrice* $A = \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 0 & 22 & 0 & 0 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{pmatrix}$.

Comme $a_{2,1} = a_{2,3} = a_{2,4} = 0$, *on obtient la partition de l'ensemble* $\{1,2,3,4\}$ *en*

$$K = \{2\} \ \text{ et } K^c = \{1,3,4\},$$

telle que :

$$a_{i,j} = 0 \ \forall i \in K, \ \ j \in K^c.$$

i.e.

$$\begin{aligned}
\left(P_\sigma^t A P_\sigma\right)_{4,1} &= a_{\boldsymbol{\sigma}(4),\boldsymbol{\sigma}(1)} = 0, \\
\left(P_\sigma^t A P_\sigma\right)_{4,2} &= a_{\boldsymbol{\sigma}(4),\boldsymbol{\sigma}(2)} = 0, \\
\left(P_\sigma^t A P_\sigma\right)_{4,3} &= a_{\boldsymbol{\sigma}(4),\boldsymbol{\sigma}(3)} = 0,
\end{aligned}$$

pour

$$\boldsymbol{\sigma}(4) \in K = \{2\} \;\; \textit{et} \; \sigma(1), \sigma(2), \sigma(3) \in K^c = \{1,3,4\}.$$

Ce qui donne six permutations :

	1°	2°	3°	4°	5°	6°
$\sigma(1)$	1	3	4	1	3	4
$\sigma(2)$	3	4	1	4	1	3
$\sigma(3)$	4	1	3	3	4	1

Pour chaque cas, on obtient

$$P_\sigma^t A P_\sigma = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ 0 & A_{2,2} \end{pmatrix},$$

où $A_{1,1}$ *et* $A_{2,2}$ *sont deux matrices carrées, donc* A *est irréductible.*

Par exemple, pour le cas 1: $\sigma(1) = 1$, $\sigma(2) = 3$, $\sigma(3) = 4$, *on a*

$$P_\sigma^t A P_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 0 & 22 & 0 & 0 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 13 & 14 & 12 \\ 31 & 33 & 34 & 32 \\ 41 & 43 & 44 & 42 \\ 0 & 0 & 0 & 22 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 11 & 13 & 14 \\ 31 & 33 & 34 \\ 41 & 43 & 44 \end{pmatrix}}_{A_{1,1}} & \underbrace{\begin{pmatrix} 12 \\ 32 \\ 42 \end{pmatrix}}_{A_{1,2}} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A_{2,1}} & \underbrace{(22)}_{A_{2,2}} \end{pmatrix}.$$

Exemple 28 - *Soit* $A = \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 0 & 22 & 0 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 0 & 42 & 0 & 44 \end{pmatrix}$.

Ici, on a :

$$a_{i,j} = 0 \;\forall i \in K = \{2,4\}, \;\; j \in K^c = \{1,3\},$$

où K *et* K^c *est une partition de* $\{1,2,3,4\}$. *Donc*

$$\left(P_\sigma^t A P_\sigma\right)_{i,j} = a_{\sigma(i),\sigma(j)} = 0 \;\; \forall (i, \sigma(i)) \in \{3,4\} \times K, \;\; (j, \sigma(j)) \in \{1,2\} \times K^c.$$

Par exemple pour $\sigma(3)=2$, $\sigma(4)=4$, $\sigma(1)=1$, $\sigma(2)=3$, *on trouve*

$$P_\sigma^t A P_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 0 & 22 & 0 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 0 & 42 & 0 & 44 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 13 & 12 & 14 \\ 31 & 33 & 32 & 34 \\ 0 & 0 & 22 & 24 \\ 0 & 0 & 42 & 44 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 11 & 13 \\ 31 & 33 \end{pmatrix}}_{A_{1,1}} & \underbrace{\begin{pmatrix} 12 & 14 \\ 32 & 34 \end{pmatrix}}_{A_{1,2}} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A_{2,1}} & \underbrace{\begin{pmatrix} 22 & 24 \\ 42 & 44 \end{pmatrix}}_{A_{2,2}} \end{pmatrix},$$

Donc A *est réductible.*

De manière générale, on a :

Lemme 7 - *Une matrice* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *est réductible, si et seulement si, il existe une partition de l'ensemble* $\{1, 2, .., n\}$ *en* K *et* K^c*, telle que :*

$$a_{i,j} = 0 \ \forall i \in K, \ \ j \in K^c.$$

- **Preuve.** Si $A \in M_n(\mathbb{C})$ est réductible, alors il existe une matrice de permutation P_σ, telle que :

$$P_\sigma^t A P_\sigma = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ 0 & A_{2,2} \end{pmatrix},$$

où $A_{1,1} \in M_p(\mathbb{C})$, $1 \leq p < n$, et $A_{2,2} \in M_{n-p}(\mathbb{C})$. Donc, pour

$$i \in K = \{\sigma(i_0);\ p+1 \leq i_0 \leq n\} \text{ et } j \in K^c = \{\sigma(j_0);\ 1 \leq j_0 \leq p\},$$

on obtient

$$a_{i,j} = a_{\sigma(i_0),\sigma(j_0)} = \left(P_\sigma^t A P_\sigma\right)_{i_0,j_0} = 0.$$

Réciproquement, soit une partition de $\{1, 2, .., n\}$ en K et K^c, telle que :

$$a_{i,j} = 0 \ \forall i \in K, j \in K^c.$$

On définit une permutation, telle que :

$$\begin{array}{rrcl} \sigma : & \{1, .., p\} & \to & K \\ : & \{p+1, .., n\} & \to & K^c \end{array}$$

On trouve pour $i \in \{p+1, .., n\}$ et $j \in \{1, .., p\}$

$$\left(P_\sigma^t A P_\sigma\right)_{i,j} = a_{\boldsymbol{\sigma}(i),\boldsymbol{\sigma}(j)} = 0.$$

Remarque 13 - *Si une ligne* k *d'une matrice* A *est nulle alors* A *est réductible, puisque*

$$a_{i,j} = 0 \ \forall i \in K = \{k\} \ \text{ et } j \in K^c = \{1, 2, .., n\} \setminus K.$$

7.2 Matrice irréductible

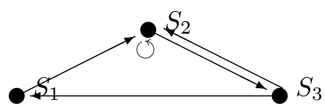
Définition 12 - *Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est irréductible si A est une matrice non réductible.*

Afin, de caractériser ce type de matrice, on associe à $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ un graphe de n sommets notés $S_1, .., S_n$.

Définition 13 (Arc) - *Un arc du graphe $S_i \curvearrowright S_j$ relie S_i à S_j si $a_{i,j} \neq 0$.*

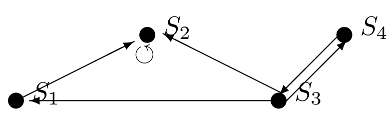
Exemple 29 - *Le graphe de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ comporte 5 arcs liés à 3 sommets.*

$$\textit{Les arcs du graphe de } A : \begin{array}{ll} S_1 \curvearrowright S_2 & a_{1,2} \neq 0. \\ S_2 \curvearrowright S_2 & a_{2,2} \neq 0. \\ S_2 \curvearrowright S_3 & a_{2,3} \neq 0. \\ S_3 \curvearrowright S_1 & a_{3,1} \neq 0. \\ S_3 \curvearrowright S_2 & a_{3,2} \neq 0. \end{array}$$



Graphe de la matrice A

Exemple 30 - *Pour la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 22 & 0 & 0 \\ 31 & 32 & 0 & 34 \\ 0 & 0 & 43 & 0 \end{pmatrix}$, on a :*



Graphe de la matrice A

Définition 14 (Chemin) - *Un chemin du graphe*

$$S_i \curvearrowright S_{i_1} \curvearrowright S_{i_2} \curvearrowright ... \curvearrowright S_{i_p} \curvearrowright S_j ,,$$

allant de S_i à S_j est une suite d'arcs, si elle existe, telle que :

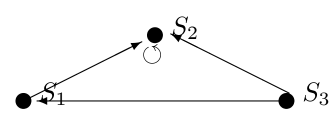
$$S_i \curvearrowright S_{i_1},\ S_{i_1} \curvearrowright S_{i_2}, ...,\ S_{i_p} \curvearrowright S_j,$$

soient des arcs du graphe.

Remarque 14 - *Un arc est donc un chemin.*
Dans l'exemple (29), Il n'ya pas d'arc reliant S_2 à S_1, par contre $S_2 \curvearrowright S_3 \curvearrowright S_1$ est un chemin de S_2 à S_1.

Définition 15 (Graphe fortement connexe) - *Un graphe est dit fortement connexe s'il existe au moins un chemin allant de tout sommet S_i à tout sommet S_j, $i, j = 1, ..., n$.*

Exemple 31 - *Ainsi, le graphe de A de l'exemple (29) est fortement connexe. Par contre, celui de la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 12 & 0 \\ 0 & 22 & 0 \\ 31 & 32 & 0 \end{pmatrix}$ ne l'est pas, car il n'ya pas de chemin allant de S_1 à S_3.*



`Graphe de la matrice` B

Lemme 8 - *Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est irréductible, si et seulement si, son graphe associé est fortement connexe.*

- **Preuve.** Soit A une matrice irréductible. Soit S_i un sommet de graphe et E_i l'ensemble des indices des sommets qui peuvent être joints par un chemin issu de S_i. On a nécessairement $E_i \neq \emptyset$ (voir remarque 13). Plus précisement on a $E_i = \{1, 2, .., n\}$, car sinon en posant

  $$K = E_i \text{ et } K^c = \{1, 2, .., n\} \setminus K$$

  on aurait

  $$a_{i,j} = 0 \ \forall i \in K,\ j \in K^c.$$

  Donc le graphe de A est fortement connexe.

  Réciproquement, supposons que A est réductible, i.e.

  $$a_{i,j} = 0 \ \forall i \in K,\ j \in K^c,$$

pour une partition de $\{1,2,..,n\}$ en K, K^c. Comme le graphe de A est fortement connexe, il existe un chemin allant de S_i à S_j; ce qui entraîne que :

$$a_{i_0,j_0} \neq 0 \ \forall i_0 \in K, \ \ j_0 \in K^c,$$

ce qui est impossible. Donc A est irréductible.

Exemple 32 - *La matrice A de l'exemple (29) est irréductible. Par contre, la matrice B de l'exemple (31) est réductible.*

Exemple 33 - *Une matrice de la forme*

$$A = \begin{pmatrix} \bullet & \times & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \times & \bullet & \times & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \times & \bullet & \times & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \times & \bullet & \times & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \times & \bullet & \times \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \times & \bullet \end{pmatrix}$$

$\times$ *terme* $\neq 0$ *et* $\bullet$ *terme quelconque,*

est irréductible.

7.3 Localisation des valeurs propres

Théorème 8 (Gershgorin (suite)) - *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice irréductible. Alors, si $\lambda(A)$ est située sur <u>la frontière</u> de la réunion des disques de Gershgorin $\bigcup_{i=1}^{n} D_i(A)$, tous les cercles de Gershgorin passent par $\lambda(A)$, i.e.*

$$|\lambda(A) - a_{k,k}| = \Lambda_k(A) \ \ \forall k = 1,..,n.$$

- **Preuve.** Soit λ une valeur propre de A et x un vecteur propre associé. Introduisons le sous-ensemble d'indices

$$K = \{k, \text{ tel que } |x_k| = \|\mathbf{x}\|_\infty\}.$$

Il est clair que $K \neq \emptyset$. Posons

$$\mathbf{y} = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_\infty},$$

de sorte que

$$A\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y}, \tag{7.1}$$

avec

$$|y_k| = 1 \ \forall k \in K,$$
$$|y_i| < 1 \ \forall i \notin K.$$

La k-ième ligne de (7.1), où $k \in K$, s'écrit

$$\sum_{i=1}^{n} a_{k,i} y_i = \lambda y_k.$$

Donc

$$|\lambda - a_{k,k}| \times \underbrace{|y_k|}_{1} = \left| \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} a_{k,i} y_i \right| \leq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} |a_{k,i}| \times \underbrace{|y_i|}_{\leq 1} \leq \underbrace{\Lambda_k(A)}_{\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} |a_{k,i}|};$$

i.e.

$$|\lambda - a_{k,k}| \leq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} |a_{k,i}| \times |y_i| \leq \Lambda_k(A). \tag{7.2}$$

Par ailleurs, si λ est située sur <u>la frontière</u> de $\bigcup_{i=1}^{n} D_i(A)$, i.e. λ n'étant pas à l'intérieur de $\bigcup_{i=1}^{n} D_i(A)$, donc il n'existe aucun j pour lequel

$$|\lambda - a_{j,j}| < \Lambda_j(A).$$

Donc

$$|\lambda - a_{j,j}| \geq \Lambda_j(A) \ \ \forall j = 1, .., n.$$

De (7.2), on a nécessairement

$$|\lambda - a_{k,k}| = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} |a_{k,i}| \times |y_i| = \Lambda_k(A) \ \ \forall k \in K. \tag{7.3}$$

Distinguons deux cas :
Cas 1- $K = \{1, ..., n\}$.
La preuve dans ce cas est triviale, pour les matrices irréductibles ou non, puisque (7.3) s'écrit

$$|\lambda - a_{k,k}| = \Lambda_k(A) \, \forall k = 1, ..n.$$

Cas 2- $K \neq \{1, ..., n\}$.
Donc

$$|y_i| < 1 \ \forall i \in K^c,$$

pour

$$K^c = \{1, ..., n\} \setminus K \neq \emptyset.$$

Or, de (7.3)

$$\Lambda_k(A) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} |a_{k,i}| \times |y_i| = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \underbrace{|a_{k,i}| \times \left(1 - \underbrace{|y_i|}_{\leq 1}\right)}_{\geq 0} = 0 \ \ \forall k \in K,$$

ou encore

$$|a_{k,i}| \times \left(\underbrace{1-|y_i|}_{>0} \right) = 0 \;\; \forall i \in K^c, \; \forall k \in K,$$

donc

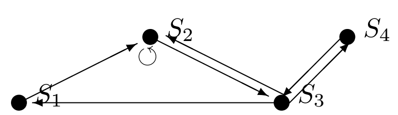
$$a_{k,i} = 0 \; \forall k \in K, \; \forall i \in K^c.$$

Résultat impossible pour les matrices irréductibles. D'où

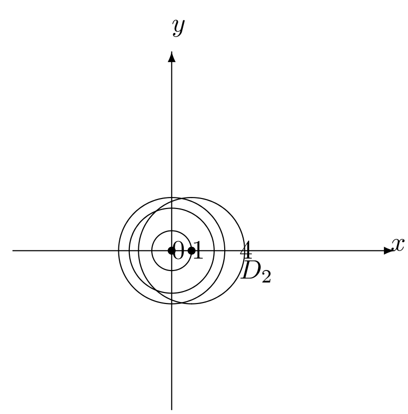
$$K^c = \emptyset,$$

ce qui conduit au cas 1.

Exemple 34 - *Considérons le cas de la matrice irréductible* $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.



Graphe de la matrice A



On peut utiliser le théorème 8 pour déduire, par exemple, que $\lambda_i(A) \neq 4$, *car le* *point $z = 4$ qui est situé sur la frontière de la réunion des disques $\bigcup_{i=1}^{4} D_i(A)$, où*

$$\begin{aligned} D_1 &= \{z \in \mathbb{C},\ \ |z| \leq 2\}, \\ D_2 &= \{z \in \mathbb{C},\ \ |z-1| \leq 3\}, \\ D_3 &= \{z \in \mathbb{C},\ \ |z| \leq 3\}, \\ D_4 &= \{z \in \mathbb{C},\ \ |z| \leq 1\}, \end{aligned}$$

ne se trouve pas sur la frontière du disque D_4.

Exemple 35 - *La matrice* $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & . & . & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & . & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ *est inversible.*

En effet, les valeurs propres de A sont contenues dans la région

$$\bigcup_{i=1}^{n} D_i(A) = \{z \in \mathbb{C},\ \ |z-2| \leq 2\}.$$

A étant irréductible et le point $\lambda = 0$, situé sur la frontière de $\bigcup_{i=1}^{n} D_i(A)$, ne se trouve pas sur le cercle $D_1(A)$. Donc

$$0 \notin S_p(A).$$

7.4 Matrice à diagonale fortement dominante

Lemme 9 - *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est à diagonale fortement dominante et irréductible, alors A est inversible.*

- **Preuve.** La matrice A est à diagonale dominante, donc

  $$|0 - a_{k,k}| \geq \Lambda_k(A)\ \ \forall k = 1, .., n.$$

  Si 0 était valeur propre, il serait donc sur la frontière de $\bigcup_{i=1}^{n} D_i(A)$. Comme A irréductible, alors

  $$|0 - a_{k,k}| = \Lambda_k(A)\ \ \forall k = 1, .., n.$$

  Ce qui contredit le fait que A à diagonale fortement dominante, i.e. qu'il existe un indice i pour lequel :

  $$|0 - a_{i,i}| > \Lambda_i(A).$$

Exemple 36 - *La matrice* $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ *est à diagonale fortement dominante et irréductible, donc inversible.*

7.5 Cas d'une matrice symétrique

Lemme 10 - *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *une matrice symétrique, telle que:*

$$a_{k,k} > 0 \ \forall k = 1, .., n. \tag{7.4}$$

Si A est à diagonale fortement dominante et irréductible, alors A est définie positive.

- **Preuve.** On se base sur l'équivalence (5.1). On sait, grâce à la symétrie que $\lambda(A) \in$R. On sait aussi par le théorème 5 que

$$|\lambda(A) - a_{k,k}| \leq \Lambda_k(A) \ \ \forall k = 1, .., n.$$

Donc

$$\underbrace{a_{k,k} - \lambda(A)}_{\leq|\lambda(A) - a_{k,k}|} \leq \Lambda_k(A) \ \ \forall k = 1, .., n.$$

De (7.4), on déduit

$$0 \leq \underbrace{|a_{k,k}|}_{a_{k,k}} - \Lambda_k(A) \leq \lambda(A) \ \ \forall k = 1, .., n.$$

Or, A est inversible d'après le lemme 9. D'où

$$0 < \lambda(A) \ \ \forall k = 1, .., n.$$

Exemple 37 - *La matrice* $A_\alpha = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *satisfait aux hypothèses du lemme 10 lorsque* $\alpha > 3$.
Donc A_α *est définie positive pour* $\alpha > 3$.

Remarque 15 - *Pour* $\alpha < -3$, *la matrice symétrique* A_α *est à diagonale fortement dominante et irréductible, mais non définie positive, puisque*

$$\alpha = \langle A_\alpha \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3 \rangle < 0.$$

L'hypothèse (7.4) est donc nécessaire pour établir le lemme 10.

8

Matrice positive

Théorème 9 (Frobenius) - *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A \geq 0$. Alors, on a*[1] *:*
P1) Le rayon spectral $\rho(A)$ est une valeur propre de A.
P2) Il existe au moins un vecteur propre réel $\mathbf{x}_\rho \geq 0$ associé à $\rho(A)$.
P3)

$$\rho(B) \geq \rho(A) \ \ \forall B \geq A \geq 0.$$

Si de plus A est irréductible, alors
P4) Le rayon spectral $\rho(A)$ est une valeur propre simple.
P5) Le vecteur propre $\mathbf{x}_\rho > 0$.
P6)

$$\rho(B) > \rho(A) \ \ \forall B \neq A \text{ et } B \geq A \geq 0.$$

Exemple 38 - *Le rayon spectral de la matrice* $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *n'est pas une valeur propre. Ceci ne contredit pas P1) car $A \ngeq 0$.*

Exemple 39 - *Pour la matrice positive* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, *on a $A\mathbf{x}_k = \lambda_k \mathbf{x}_k$ avec*

$$\lambda_1(A) = 1, \quad \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_2(A) = 2, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\lambda_3(A)}_{\rho(A)} = 3, \quad \underbrace{\mathbf{x}_3}_{\mathbf{x}_\rho} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

[1] Pour la démonstration voir
VARGA R.S. (1962) Edit. John Wiley, " *Matrix Iterative Analysis*".

On vérifie bien P1) et P2), puisque

$$\rho(A) = \lambda_3(A) \ \text{ et } \mathbf{x}_\rho \geq 0.$$

Comme $\mathbf{x}_\rho \ngtr 0$, *on déduit de P5) que A n'est pas irréductible.*

Exemple 40 - *Soit* $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ *et* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. *On a :*

$$\lambda_1(B) = i,\ \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} - \frac{17}{10}i \\ -\frac{7}{10} + \frac{9}{10}i \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_2(B) = -i,\ \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} + \frac{17}{10}i \\ -\frac{7}{10} - \frac{9}{10}i \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\underbrace{\lambda_3(B)}_{\rho(B)} = 6,\ \underbrace{\mathbf{x}_3}_{\mathbf{x}_\rho} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie bien P4) et P5), puisque

$$\rho(B) = \lambda_3(B) \ \text{ est une propre simple et } \mathbf{x}_\rho > 0.$$

De P6), on déduit que :

$$\underbrace{\rho(B)}_{6} > \underbrace{\rho(A)}_{3}.$$

Remarque 16 - *Si* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A \geq 0$, *alors*

$$\|A\|_\infty = \|A\mathbf{1}\|_\infty.$$

9

Matrice monotone

Définition 16 - *Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est monotone et on dit M-matrice si A^{-1} existe et si $A^{-1} \geq O$.*

Exemple 41 - *Pour* $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *on a* $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \geq 0.$
Donc A est une M-matrice.
Par contre, la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ *ne l'est pas puisque* $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \ngeq 0.$

Exemple 42 - *La matrice* $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & a \end{pmatrix}$ *a pour inverse* $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\frac{2a+1}{a-1} & \frac{1}{a-1} \\ 0 & \frac{a}{a-1} & \frac{1}{a-1} \\ 0 & \frac{1}{a-1} & \frac{1}{a-1} \end{pmatrix}.$

Alors

$$A \text{ est } M - \text{matrice} \Leftrightarrow a > 1.$$

Remarque 17 - *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors*

$$A \textit{ est une M-matrice} \Leftrightarrow \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{: } A\mathbf{x} \geq 0 \Rightarrow \mathbf{x} \geq 0\}.$$

9.1 Condition suffisante pour les M-matrices

Pour reconnaître une M-matrice nous utiliserons souvent le

Théorème 10 - *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que :*

$$a_{i,i} > 0 \ \forall i \in \{1, .., n\},$$
$$a_{i,j} \leq 0 \ \forall i \neq j \in \{1, .., n\}.$$

Si A est à diagonale dominante et inversible (en particulier, si A une matrice à diagonale fortement dominante et irréductible), alors A est une M-matrice.

- **Preuve.** La matrice diagonale $D = (d_{i,j})$, telle que $d_{i,i} = a_{i,i}$ est donc inversible. On écrit A sous la forme
$$A = D - (D - A) = D\left(I - \underbrace{D^{-1}(D - A)}_{B}\right).$$
Les matrices D^{-1} et $D - A$ sont positives et donc $B \geq 0$. Plus précisement, pour $B = (b_{i,j})$ on a
$$b_{i,i} = 0\ \forall i,\ b_{i,j} = \frac{|a_{i,j}|}{|a_{i,i}|}\ \forall i \neq j.$$
De plus
$$\sum_j |b_{i,j}| = \frac{\Lambda_i(A)}{|a_{i,i}|} \leq 1,$$
car A est à diagonale dominante. D'où $||B||_\infty \leq 1$. Donc $\rho(B) \leq 1$.
Montrons maintenant que $\rho(B) \neq 1$. En effet, comme $B \geq 0$, alors le rayon spectral $\rho(B)$ est une valeur propre de B. Supposons que $\rho(B) = 1$, alors il existe $x \neq 0$, tel que $Bx = x$. Donc $Ax = 0$. Ceci implique que $x = 0$ car A est inversible. Ce qui est absurde. On conclut finalement que $\rho(B) < 1$.
La matrice $(I - B)$ est donc inversible et $(I - B)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} B^k \geq 0$. D'où
$$A^{-1} = (I - B)^{-1} D^{-1} \geq 0.$$

Exemple 43 - *La matrice* $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & a \end{pmatrix}$, *$a > 1$, est une M-matrice.*

Exemple 44 - *La matrice* $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & . & . & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & . & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ *de l'exemple 35 est une M-matrice.*

9.2 Borne de l'inverse d'une matrice monotone

Théorème 11 - *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une M-matrice, alors*
$$A\mathbf{y} = \mathbf{1} \Rightarrow \left\|A^{-1}\right\|_\infty = \|\mathbf{y}\|_\infty. \tag{9.1}$$
$$A\mathbf{y} \geq \mathbf{1} \Rightarrow \left\|A^{-1}\right\|_\infty \leq \|\mathbf{y}\|_\infty. \tag{9.2}$$

- **Preuve.** On déduit de $Ay \geq 1$ (resp. $Ay = 1$) que $0 \leq A^{-1}1 \leq y$ (resp. $A^{-1}1 = y$) car $A^{-1} \geq 0$. Le résultat suit en utilisant le fait que $\left\|A^{-1}\right\|_\infty = \left\|A^{-1}\mathbf{1}\right\|_\infty$.

Exemple 45 - *Pour la M-matrice* $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *on a :* $A\mathbf{y} = \mathbf{1}$ *pour* $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. *Donc* $\left\|A^{-1}\right\|_\infty = \|\mathbf{y}\|_\infty = 3$.

On vérifie bien que $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *et donc* $\left\|A^{-1}\right\|_\infty = 3$.

Exemple 46 - *Le résultat est faux pour la matrice non monotone* $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La matrice inverse $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *a pour norme* $\left\|B^{-1}\right\|_\infty = 3$.

Cependant, $B\mathbf{y} = \mathbf{1}$ *pour* $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\|\mathbf{y}\|_\infty = 1 \neq \left\|B^{-1}\right\|_\infty$.

Lemme 11 - *Soit* A, B *deux matrices monotones de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, *alors*

$$A \leq B \Rightarrow \left\|B^{-1}\right\|_\infty \leq \left\|A^{-1}\right\|_\infty .$$

- **Preuve.** Compte tenu du fait que $A^{-1} \geq 0$, $B^{-1} \geq 0$, on a :

$$A \leq B \Rightarrow B^{-1}A \leq \underbrace{B^{-1}B}_{I} \Rightarrow B^{-1}\underbrace{AA^{-1}}_{I} \leq IA^{-1} \Rightarrow B^{-1} \leq A^{-1} \Rightarrow \left\|B^{-1}\right\|_\infty \leq \left\|A^{-1}\right\|_\infty .$$

Exemple 47 - *Par exemple* $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leq B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Les matrices A, B *sont monotones d'après le théorème 10, donc*

$$\left\|B^{-1}\right\|_\infty \leq \left\|A^{-1}\right\|_\infty .$$

Vérification :

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\|B^{-1}\right\|_\infty = \frac{7}{5};$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \left\|A^{-1}\right\|_\infty = 4.$$

On a bien $\left\|B^{-1}\right\|_\infty \leq \left\|A^{-1}\right\|_\infty$.

9.3 Stabilité d'une matrice

On aura également besoin des résultats utiles suivants :

Théorème 12 - *Soit $B = I - \tau A$ où $\tau > 0$ et $A = [a_{i,j}]$ une matrice inversible et à diagonale dominante (en particulier, si A une matrice à diagonale fortement dominante et irréductible), telle que*

$$a_{i,i} > 0 \; \forall i \text{ et } a_{i,j} \leq 0 \text{ pour } i \neq j. \tag{9.3}$$

Si

$$\tau \leq \min_i \frac{1}{a_{i,i}}, \tag{9.4}$$

alors

$$\begin{aligned} B &\geq 0, \\ \|B\|_\infty &\leq 1, \\ \rho(B) &< 1. \end{aligned}$$

- **Preuve.** La matrice $B = [b_{i,j}]$ est définie par

$$b_{i,j} = \begin{cases} 1 - \tau a_{i,i} & i = j \\ -\tau a_{i,j} & i \neq j \end{cases}.$$

Compte tenu des hypothèses (9.3)-(9.4)

$$B \geq 0.$$

Par suite

$$\begin{aligned} \|B\|_\infty &= \max_i \left\{ \sum_j |b_{i,j}| \right\} \\ &= \max_i \left\{ 1 - \tau a_{i,i} + \sum_{j \neq i} -\tau a_{i,j} \right\} \\ &= \max_i \left\{ 1 - \tau \left(\underbrace{|a_{i,i}| - \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|}_{\geq 0} \right) \right\}, \end{aligned}$$

or A est à diagonale dominante, donc

$$\|B\|_\infty \leq 1.$$

Par conséquent,

$$\rho(B) \leq \|B\|_\infty \leq 1.$$

Il reste à montrer que

$$\rho(B) \neq 1.$$

En effet, le rayon spectral $\rho(B)$ est une valeur propre lorsque $B \geq 0$. Donc, si $\rho(B) = 1$, on aurait

$$B\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}$$

pour

$$\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}.$$

Il en découle, puisque A est inversible, que

$$\begin{aligned}(I - \tau A)\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \Rightarrow A\overrightarrow{v} &= \overrightarrow{0} \\ \Rightarrow \overrightarrow{v} &= \overrightarrow{0}.\end{aligned}$$

Ce qui est absolument absurde.

Théorème 13 - *Soit* $C = (I + \tau A)^{-1}$ *où* $\tau > 0$ *et* $A = [a_{i,j}]$ *une matrice inversible et à diagonale dominante (en particulier, si A une matrice à diagonale fortement dominante et irréductible), telle que*

$$a_{i,i} > 0 \ \forall i \quad \text{et } a_{i,j} \leq 0 \text{ pour } i \neq j. \tag{9.5}$$

Alors

$$\begin{aligned} C &\geq 0, \\ \|C\|_\infty &\leq 1, \\ \rho(C) &< 1. \end{aligned}$$

- **Preuve.** On a $C = M^{-1}$ où $M = [m_{i,j}]$ est définie par

$$M = I + \tau A.$$

i.e.

$$m_{i,j} = \begin{cases} 1 + \tau a_{i,i} & i = j \\ \tau a_{i,j} & i \neq j \end{cases}.$$

Il est facile de voir, compte tenu des hypothèses, que la matrice M est à diagonale strictement dominante. Donc inversible. De plus

$$m_{i,j} > 0 \text{ pour } i = j \text{ et } m_{i,j} \leq 0 \text{ pour } i \neq j.$$

On conclut immédiatement que M est une M$-$matrice, i.e. $C \geq 0$. Comme

$$M\overrightarrow{1} \geq \overrightarrow{1},$$

alors

$$\rho(C) \leq \|C\|_\infty = \left\|M^{-1}\right\|_\infty \leq \left\|\overrightarrow{1}\right\|_\infty = 1.$$

Il reste à montrer que

$$\rho(C) \neq 1.$$

En effet, comme $C \geq 0$, alors si $\rho(C) = 1$, on aurait

$$C\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \text{ pour } \overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}.$$

Par suite

$$\begin{aligned}(I + \tau A)^{-1}\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \Rightarrow \overrightarrow{v} &= (I + \tau A)\overrightarrow{v} \\ \Rightarrow A\overrightarrow{v} &= \overrightarrow{0} \\ \Rightarrow \overrightarrow{v} &= \overrightarrow{0}.\end{aligned}$$

Ce qui est absurde.

10

Analyse d'erreurs dans les systèmes linéaires

10.1 Introduction

Une incertitude[1] sur les données $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ du système linéaire

$$A\mathbf{x} = \mathbf{y}, \tag{10.1}$$

peut donner une solution $\mathbf{x}$ entachée d'une erreur relative de 100 , 1000 fois ou même nettement supérieure.

Exemple 48 - *En effet, considérons le système élémentaire suivant :*

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 19 \\ 17 \end{pmatrix}}_{\mathbf{y}}, \text{ de solution } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Perturbons les coefficients de sa matrice de la manière suivante :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 10 & 8.9 \\ 9.1 & 8.1 \end{pmatrix}}_{\widetilde{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} \widetilde{x}_1 \\ \widetilde{x}_2 \end{pmatrix}}_{\widetilde{\mathbf{x}}} = \begin{pmatrix} 19 \\ 17 \end{pmatrix},$$

soit une erreur relative commise sur la matrice, en norme $\|.\|_\infty$, de

$$\delta A = \frac{\|\Delta A\|_\infty}{\|A\|_\infty} = \frac{0.2}{19} = 1.0526 \times 10^{-2} \qquad \text{où } \Delta A = \widetilde{A} - A = \begin{pmatrix} 0 & -0.1 \\ 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

[1] L'erreur est due, par exemple, aux instruments de mesures, ou simplement les données A, $\mathbf{y}$ sont calculées par des méthodes de discrétisation numérique (différences finies, éléments finis,...), ou enfin par leurs représentations en nombres machine lors de sa résolution par ordinateur.

On constate que la solution du système perturbé est égale à

$$\begin{pmatrix} \widetilde{x}_1 \\ \widetilde{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +260 \\ -290 \end{pmatrix}.$$

10.2 Perturbation de la matrice

De manière générale, considérons la résolution du problème (10.1) pour une matrice inversible A donnée. Pour une raison quelconque, supposons que la matrice A est remplacée par la matrice

$$\tilde{A} \equiv A + \Delta A.$$

Alors, une solution du nouveau système notée par

$$\widetilde{\mathbf{x}} \equiv \mathbf{x} + \Delta\mathbf{x},$$

vérifie :

$$(A + \Delta A)\widetilde{\mathbf{x}} = \mathbf{y}. \tag{10.2}$$

L'erreur commise sur la matrice est d'une valeur égale à $\|\Delta A\|$, ou en erreur relative, est égale à

$$\delta A = \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}.$$

Ici, le symbole $\| \,.\, \|$ désigne une norme matricielle subordonnée à définir.

Nous allons calculer une estimation du rapport d'amplification des erreurs

$$\frac{\dfrac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}\|}}{\dfrac{\|\Delta A\|}{\|A\|}}.$$

Pour cela, on a :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} A\mathbf{x} & = & \mathbf{y} \\ (A + \Delta A)(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) & = & \mathbf{y} \end{array} \right. \Longrightarrow A\Delta\mathbf{x} = -\Delta A(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}).$$

On en déduit, puisque A^{-1} existe, que :

$$\Delta\mathbf{x} = -A^{-1}\Delta A(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}).$$

On a donc

$$\begin{array}{rcl} \|\Delta\mathbf{x}\| & = & \left\|A^{-1}\Delta A(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x})\right\| \\ & \leq & \left\|A^{-1}\right\| \times \|\Delta A\| \times \|\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}\|. \end{array}$$

D'où

$$\begin{aligned} \frac{\|\Delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}+\Delta \mathbf{x}\|} &\leq \left\|A^{-1}\right\| \times \|\Delta A\| \\ &= (\left\|A^{-1}\right\| \times \|A\|)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \end{aligned} \tag{10.3}$$

De sorte que l'erreur sur les résultats est encore donnée par

$$\frac{\|\Delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}+\Delta \mathbf{x}\|} \leq \mathrm{Cond}(A) \times \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \tag{10.4}$$

pour

$$\mathrm{Cond}(A) = \left\|A^{-1}\right\| \times \|A\|. \tag{10.5}$$

Définition 17 - *Ce nombre*

$$Cond(A) = \left\|A^{-1}\right\| \times \|A\|,$$

s'appelle le conditionnement de la matrice A, relativement à la norme matricielle considérée, et mesure la sensibilité de la solution par rapport aux variations de la matrice.

10.2.1 Estimation de l'erreur

En résumé, on vient de démontrer le

Théorème 14 - *Soit A une matrice inversible. Soient $\mathbf{x}$ et $\widetilde{\mathbf{x}} \equiv \mathbf{x} + \Delta\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ les solutions respectives des systèmes :*

$$A\mathbf{x} = \mathbf{y} \quad et \ (A+\Delta A)\widetilde{\mathbf{x}} = \mathbf{y}.$$

Alors, on a :

$$\frac{\|\Delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}+\Delta \mathbf{x}\|} \leq Cond(A) \times \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}, \tag{10.6}$$

pour toute norme matricielle subordonnée $\|.\|$.

Exemple 49 - *Le conditionnement en norme $\|.\|_\infty$ de la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 9 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 9 \\ 9 & -10 \end{pmatrix},$$

est égal à

$$Cond_\infty(A) = \underbrace{\|A\|_\infty}_{19} \times \underbrace{\left\|A^{-1}\right\|_\infty}_{19} = 19^2 = 361.$$

Remarque 18 - *Le nombre $Cond(A)$ vérifie toujours*

$$Cond(A) \geq 1.$$

Ceci vient du fait que

$$AA^{-1} = I \Longrightarrow \|I\| = \left\|AA^{-1}\right\| \Longrightarrow 1 \leq \|A\| \times \left\|A^{-1}\right\| = Cond(A).$$

Remarque 19 - *Si nous connaissons le plus petit et le plus grand module des valeurs propres, notés respectivement ρ_1, ρ_n, de la matrice produit A^*A, le calcul de*

$$Cond_2\,(A) = \|A\|_2 \times \left\|A^{-1}\right\|_2$$

peut s'effectuer sans connaître A^{-1} par la formule :

$$Cond_2\,(A) = \sqrt{\left|\frac{\rho_n}{\rho_1}\right|}.$$

Cette relation devient dans le cas où la matrice est symétrique

$$Cond_2\,(A) = \left|\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right|,$$

où les λ_j sont les valeurs propres de A, rangées de la façon suivante :

$$|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq ... \leq |\lambda_n|.$$

Exemple 50 - *On choisit la norme $\|.\|_2$ et on se place dans le cadre de l'exemple donné par*

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 9 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \; A^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 9 \\ 9 & -10 \end{pmatrix}.$$

Calcul du conditionnement : *les valeurs prores de A sont*

$$\lambda_2 = 9 + \sqrt{82}, \;\; \lambda_1 = 9 - \sqrt{82}.$$

La matrice A étant symétrique, donc

$$\|A\|_2 = \lambda_2 \;\; et \;\; \left\|A^{-1}\right\|_2 = \frac{1}{|\lambda_1|} \Rightarrow Cond_2(A) = \|A\|_2 \times \left\|A^{-1}\right\|_2 = \left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right| = \frac{9+\sqrt{82}}{-9+\sqrt{82}} \simeq 326.$$

Calcul du rapport d'amplification : $\dfrac{\frac{\|\Delta\mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}\|_2}}{\frac{\|\Delta A\|_2}{\|A\|_2}} =?$. *On a*

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\mathbf{x} = \widetilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 259 \\ -291 \end{pmatrix} \\ \mathbf{x} + \Delta\mathbf{x} = \widetilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} +260 \\ -290 \end{pmatrix} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{\|\Delta\mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}\|_2} = \frac{\sqrt{259^2+291^2}}{\sqrt{260^2+290^2}} \simeq 1.000\,2$$

Calculons $\|\Delta A\|_2 =?$. La matrice

$$(\Delta A)^*\,\Delta A = \begin{pmatrix} 0 & 0.1 \\ -0.1 & 0.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -0.1 \\ 0.1 & 0.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} .0\,1 & .0\,1 \\ .0\,1 & .0\,2 \end{pmatrix},$$

a pour valeurs propres

$$\lambda_1 \simeq 3.\,819\,7 \times 10^{-3} \;\; et \;\lambda_2 \simeq .0\,261\,8 \Rightarrow \rho\left((\Delta A)^*\,\Delta A\right) = \lambda_2,$$

donc

$$\|\Delta A\|_2 = \sqrt{\rho\left((\Delta A)^* \Delta A\right)} \simeq \sqrt{.0\,261\,8}.$$

Ce qui donne

$$\frac{\frac{\|\Delta \mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x}+\Delta \mathbf{x}\|_2}}{\frac{\|\Delta A\|_2}{\|A\|_2}} \simeq \frac{\frac{\sqrt{259^2+291^2}}{\sqrt{260^2+290^2}}}{\frac{\sqrt{.0\,261\,8}}{9+\sqrt{82}}} \simeq 111.\,61$$

On constate qu'on a bien :

$$\underbrace{\frac{\frac{\|\Delta \mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x}+\Delta \mathbf{x}\|_2}}{\frac{\|\Delta A\|_2}{\|A\|_2}}}_{111.\,61} \leq \underbrace{Cond_2(A)}_{326}.$$

Exemple 51 - *Considérons la résolution du système $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ où*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} & \frac{1}{11} \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

La solution est

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 21\,918 \\ -618\,870 \\ 4161\,360 \\ -10\,780\,560 \\ 11\,865\,420 \\ -4665\,276 \end{pmatrix}.$$

Considérons maintenant le système $(A + \Delta A)\widetilde{\mathbf{x}} = \mathbf{y}$ où la matrice

$$A + \Delta A = \begin{pmatrix} 1 & .5 & .33 & .25 & .20 & .16 \\ .5 & .33 & .25 & .20 & .16 & .14 \\ .33 & .25 & .20 & .16 & .14 & .12 \\ .25 & .20 & .16 & .14 & .12 & .11 \\ .20 & .16 & .14 & .12 & .11 & .10 \\ .16 & .14 & .12 & .11 & .10 & .09 \end{pmatrix}$$

obtenue en tronquant les nombres après 2 chiffres décimaux significatifs. On trouve

$$\widetilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 5.\,088\,5 \\ 6.\,415\,9 \\ 164.\,38 \\ -417.\,92 \\ 49.\,558 \\ 206.\,42 \end{pmatrix} \text{ au lieu de } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 21\,918 \\ -618\,870 \\ 4161\,360 \\ -10\,780\,560 \\ 11\,865\,420 \\ -4665\,276 \end{pmatrix}.$$

Soit une erreur relative sur les solutions de

$$\frac{\|\Delta\mathbf{x}\|_\infty}{\|\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}\|_\infty} = \frac{1.\,186\,5\times 10^7}{417.\,92} = 28391,$$

pour une erreur relative sur le matrice de

$$\frac{\|\Delta A\|_\infty}{\|A\|_\infty} \simeq 7.\,2886\times 10^{-3}.$$

Le rapport d'amplification des erreurs est égal à

$$\frac{\dfrac{\|\Delta\mathbf{x}\|_\infty}{\|\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}\|_\infty}}{\dfrac{\|\Delta A\|_\infty}{\|A\|_\infty}} \simeq \frac{28391}{7.\,2886\times 10^{-3}} \simeq 3\,895\,300.$$

On constate que le conditionnement en norme $\|.\|_\infty$ *est égal à*[2]

$$Cond_\infty(A) = \underbrace{\frac{49}{20}}_{\|A\|_\infty} \times \underbrace{11\,865\,420}_{\|A^{-1}\|_\infty} = 29\,070\,279.$$

10.2.2 Optimalité de l'estimation

Exemple 52 - *Soit*

$$A = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},\ A+\Delta A = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}\ \textit{et}\ \mathbf{y} = \frac{10}{8}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Considérons le système de départ

$$A\mathbf{x} = \mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

ainsi que le système perturbé

$$(A+\Delta A)\widetilde{\mathbf{x}} = \mathbf{y} \Rightarrow \underbrace{\widetilde{\mathbf{x}}}_{\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

[2] La matrice inverse

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 36 & -630 & 3360 & -7560 & 7560 & -2772 \\ -630 & 14\,700 & -88\,200 & 211\,680 & -220\,500 & 83\,160 \\ 3360 & -88\,200 & 564\,480 & -1411\,200 & 1512\,000 & -582\,120 \\ -7560 & 211\,680 & -1411\,200 & 3628\,800 & -3969\,000 & 1552\,320 \\ 7560 & -220\,500 & 1512\,000 & -3969\,000 & 4410\,000 & -1746\,360 \\ -2772 & 83\,160 & -582\,120 & 1552\,320 & -1746\,360 & 698\,544 \end{pmatrix}.$$

En choisissant la norme $\|.\|_\infty$, *on trouve*

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\|\Delta\mathbf{x}\|_\infty}{\|\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}\|_\infty} = \frac{4}{1} = 4 \\ \dfrac{\|\Delta A\|_\infty}{\|A\|_\infty} = \frac{1}{\frac{4}{8}} = 2 \end{array}\right. \Rightarrow \dfrac{\dfrac{\|\Delta\mathbf{x}\|_\infty}{\|\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}\|_\infty}}{\dfrac{\|\Delta A\|_\infty}{\|A\|_\infty}} = \frac{4}{2} = 2.$$

$$Cond_\infty(A) = \underbrace{\frac{4}{8}}_{\|A\|_\infty} \times \underbrace{4}_{\|A^{-1}\|_\infty} = 2.$$

i.e.

$$\dfrac{\dfrac{\|\Delta\mathbf{x}\|_\infty}{\|\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}\|_\infty}}{\dfrac{\|\Delta A\|_\infty}{\|A\|_\infty}} = Cond_\infty(A).$$

On conclut que l'inégalité (10.6) est optimale pour la norme $\|.\|_\infty$.

De manière générale, pour toute norme matricielle subordonée, on a :

Théorème 15 - *L'inégalité (10.6) est optimale dans le sens où le nombre Cond(A) est la meilleure constante possible pour toute perturbation de la matrice et tout second membre.*

Preuve. Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe un nombre $c > 0$, tel que :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}\|} & \leq & c\dfrac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \text{ pour} \\ c & < & \mathrm{Cond}(A). \end{array}\right. \tag{10.7}$$

Soit $\widetilde{\mathbf{x}} \neq \mathbf{0}$ un vecteur tel que :

$$\underbrace{\max_{\mathbf{z}\neq\mathbf{0}} \frac{||A^{-1}\mathbf{z}||}{||\mathbf{z}||}}_{\|A^{-1}\|} = \frac{||A^{-1}\widetilde{\mathbf{x}}||}{||\widetilde{\mathbf{x}}||},$$

et considérons une perturbation de la matrice par l'identité, i.e. $\Delta A = I$, avec un second membre donné sous la forme

$$\mathbf{y} = (A + \underbrace{\Delta A}_{I})\widetilde{\mathbf{x}}.$$

On obtient alors :

$$\mathbf{y} = (A + \underbrace{I}_{\Delta A})(\underbrace{\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}}_{\widetilde{\mathbf{x}}}) = \underbrace{A\mathbf{x}}_{\mathbf{y}} + A\Delta\mathbf{x} + \widetilde{\mathbf{x}}.$$

i.e.

$$0 = A\Delta\mathbf{x} + \widetilde{\mathbf{x}} \Rightarrow \Delta\mathbf{x} = -\,A^{-1}\widetilde{\mathbf{x}}$$

Ainsi,

$$\|\Delta\mathbf{x}\| = \left\|A^{-1}\widetilde{\mathbf{x}}\right\| = \left\|A^{-1}\right\| \times \|\widetilde{\mathbf{x}}\|.$$

On conclut finalement, que :

$$\begin{aligned} \frac{\|\ \Delta\mathbf{x}\ \|}{\|\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}\|} &= \left\|A^{-1}\right\| \\ &= \left(\left\|A^{-1}\right\| \times \|A\|\right)\frac{\|I\|}{\|A\|} \\ &= \mathrm{Cond}\,(A)\,\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \\ &> c\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}. \end{aligned}$$

La première relation de (10.7) est donc fausse, ce qui est absurde.

10.3 Perturbation du second membre

Envisageons maintenant le cas d'une perturbation des coefficients du second membre, sans changement de la matrice.

Théorème 16 - *Soit A une matrice inversible. Soient $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ et $\widetilde{\mathbf{x}} \equiv \mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}$ les solutions respectives des systèmes :*

$$A\mathbf{x} = \mathbf{y} \ \text{ et } A\widetilde{\mathbf{x}} = \mathbf{y} + \Delta\mathbf{y}.$$

Alors, on a :

$$\frac{\|\ \Delta\mathbf{x}\ \|}{\|\mathbf{x}\|} \leq Cond\,(A)\,\frac{\|\Delta\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{y}\|}, \tag{10.8}$$

pour toute norme matricielle subordonnée $\|.\|$.

Preuve. Par différence des deux équations, on a :

$$A\Delta\mathbf{x} = \Delta\mathbf{y} \implies \Delta\mathbf{x} = A^{-1}\Delta\mathbf{y}.$$

Il résulte donc de la définition des normes subordonnées que :

$$\|\Delta\mathbf{x}\| \leq \left\|A^{-1}\right\| \times \|\Delta\mathbf{y}\|.$$

Par ailleurs,

$$A\mathbf{x} = \mathbf{y} \Rightarrow \|\mathbf{y}\| = \|A\mathbf{x}\| \leq \|A\| \times \|\mathbf{x}\| \Longrightarrow \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} \leq \frac{\|A\|}{\|\mathbf{y}\|},$$

d'où, de ces deux dernières inégalités

$$\frac{\| \Delta\mathbf{x} \|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \left\|A^{-1}\right\| \times \|\Delta\mathbf{y}\| \times \frac{\|A\|}{\|\mathbf{y}\|} = \mathrm{Cond}\,(A)\,\frac{\|\Delta\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{y}\|}.$$

Remarque 20 - *On peut également montrer que l'inégalité (10.8) est optimale.*

Exemple 53 - *Soit le système linéaire*

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}} \Longrightarrow \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Considérons le système perturbé, où la matrice restant inchangée et le second membre est modifié de la manière suivante :

$$\mathbf{y} + \Delta\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 4.1 \\ 2.9 \\ 3.1 \\ .9 \end{bmatrix}.$$

Soit une erreur relative sur le seconds membre, en norme $\|.\|_\infty$, *de*

$$\frac{\|\Delta\mathbf{y}\|_\infty}{\|\mathbf{y}\|_\infty} = \frac{.1}{4} = 0.0\,25$$

La solution $\widetilde{\mathbf{x}} \equiv \mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}$ *est égale à*

$$\widetilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 9.\,2 \\ -14.\,6 \\ 4.\,5 \\ -3.\,1 \end{bmatrix}.$$

Soit une erreur relative sur la solution de

$$\frac{\|\Delta\mathbf{x}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty} = \frac{13.6}{1} = 13.6$$

Le rapport d'amplification des erreurs est égal à

$$\frac{\frac{\|\Delta\mathbf{x}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty}}{\frac{\|\Delta\mathbf{y}\|_\infty}{\|\mathbf{y}\|_\infty}} = \frac{13.6}{0.0\,25} = 544.$$

Le conditionnement dans ce cas est égal à[3]

$$Cond_\infty(A) = \underbrace{33}_{\|A\|_\infty} \times \underbrace{136}_{\|A^{-1}\|_\infty} = 4488.$$

[3] La matrice inverse

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 25 & -41 & 10 & -6 \\ -41 & 68 & -17 & 10 \\ 10 & -17 & 5 & -3 \\ -6 & 10 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

11

Exercices

Exercice 19 - *Soit la matrice* $A = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 & 0 \\ -1 & a & -1 & 0 \\ 0 & -1 & a & -1 \\ 0 & 0 & -1 & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.
Donner par le théorème de Browne une estimation pour les valeurs propres de A.
Localiser les valeurs propres de A *à l'aide du théorème de Gershgorin.*
Calculer $\|A\|_\infty$ *et* $\|A\|_2$.
Donner des conditions sur a*, en précisant celles qui sont nécessaires, pour que* A *soit :*
1) irréductible,
2) définie positive,
3) à diagonale fortement dominante,
4) inversible,
5) M-matrice.

Exercice 20 - *Sans calcul de* A^{-1}*, déduire de (9.1) la valeur de* $\left\|A^{-1}\right\|_\infty$ *dans les cas suivants:*
Cas 1 : $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.
Cas 2 : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.
Appliquer (9.1) à $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Expliquer pourquoi le résultat est faux.

Exercice 21 - *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & a & -1 & 0 \\ 0 & -1 & b & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ *où* a *et* $b \in \mathbb{R}$, $ba \neq a + b$.

1) Calculer $\| A \|_\infty$.
2) Pour quelles valeurs de a et b la matrice A est-elle inversible ?
3) Donner le graphe de A. En déduire que A est irréductible.
4) Donner des conditions sur a et b pour que A soit définie positive.
5) Donner des conditions sur a et b pour que $\rho(A)$ soit dans le segment $]0,2[$.
6) Donner des conditions sur a et b pour que A soit une M-matrice.

Calculer dans ce cas $A\mathbf{y}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} b+ba-a \\ 2b \\ 2a \\ -b+ba+a \end{pmatrix}$. En déduire $\left\|A^{-1}\right\|_\infty$.

Exercice 22 - *Soit* $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & . & . & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & . & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & . & . & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *et*

$$\mathbf{y} = (y_i) \in \mathbb{R}^n,\ y_i = \frac{i}{n+1}\left(1 - \frac{i}{n+1}\right).$$

Calculer $A\mathbf{y}$. En déduire $\left\|A^{-1}\right\|_\infty$.

Exercice 23 - *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice à diagonale strictement dominante. On pose*

$$\delta = \min_i \left(|a_{i,i}| - \Lambda_i(A)\right).$$

1) Montrer que

$$\frac{\|A\mathbf{x}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty} \geq \delta \quad \forall \mathbf{x} \neq 0.$$

2) En déduire que

$$\left\|A^{-1}\right\|_\infty \leq \frac{1}{\delta}.$$

3) Application. Donner une majoration de $\left\|A^{-1}\right\|_\infty$ dans les cas suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4) Montrer que le résultat obtenu dans 2) est faux pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Expliquer pourquoi.

Exercice 24 - *Calculer* $Cond_2(A)$ *et* $Cond_\infty(A)$ *pour la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & . & . & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & . & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & . & . & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Exercice 25 - *Soit la matrice* $A = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 & 0 \\ -1 & a & -1 & 0 \\ 0 & -1 & a & -1 \\ 0 & 0 & -1 & a \end{pmatrix}$, $a \geq 2$.

1) Montrer que A *est une M-matrice.*

2) On introduit le vecteur $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} a \\ a+1 \\ a+1 \\ a \end{pmatrix}$. *Calculer* $A\mathbf{y}$, *en déduire que*

$$\left\|A^{-1}\right\|_\infty = \frac{a+1}{a^2-a-1}.$$

3) Calculer le nombre $Cond(A)$ *pour la norme* $\|.\|_\infty$.

4) En utilisant la méthode de votre choix, donner une majoration de $Cond(A)$ *pour la norme* $\|.\|_2$.

Exercice 26 - *Soit la matrice* $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ a & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, *où* $a \in \mathbb{R}$.

1) Pour quelles valeurs de a :

A est-elle irréductible (donner le graphe de A) ?,

A est-elle à diagonale fortement dominante ?.

2) En déduire (sans aucun calcul) des conditions suffisantes sur a pour que :

A^{-1} *existe,*

$A^{-1} \geq 0$.

3) On supposera que $-1 < 2a \leq 0$ *et on pose* $\mathbf{y} = (2,3,3,2)^t$.

Expliquer clairement pourquoi $A^{-1} \geq 0$.

Vérifier qu'il existe $c > 0$, *telle que:* $A\mathbf{y} \geq c\,\mathbf{1}$. *En déduire une majoration de* $\left\|A^{-1}\right\|_\infty$.

A l'aide du théorème de Browne, donner une estimation pour les valeurs propres de A.

Calculer $\|A\|_\infty$ *et donner une majoration de* $Cond(A)$ *pour la norme* $\|.\|_\infty$.